Bevezetés

Ez a segédlet a Nyíregyházi Főiskola Műszaki és Mezőgazdasági Karán, gépészmérnök szakos hallgatóknak oktatott, „VEM alapjai” című tantárgyhoz kapcsolódik. Nem fedi le a tantárgy teljes anyagát, hanem vázlatos jellegű. Elsődleges célja az, hogy a tananyag bevezető jellegű részeit kézhez kaphassák a hallgatók, különös tekintettel a levelező tagozatos hallgatók. *Ez a segédlet jelenleg folyamatos fejlesztés alatt áll!*
Az alábbi szakirodalmi forrásokból merítettem leginkább:

- O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, J. Z. Zhu: The finite element method, its basis and fundamentals, Elsevier Butterwort-Heineman Linacre House, Oxford, 2005, ISBN 0-7506-6320-0
- Páczelt I.: A végeselem-módszer alapjai. Miskolci Egyetem, 1993.
- Carlos A. Felippa: Introduction to Finite Element Methods, University of Colorado, textbook assembled from lecture notes, 2004.

Kiemelt forrásmű:

- Páczelt István, Szabó Tamás, Baksa Attila: A végeselem-módszer alapjai, elektronikus jegyzet, (kiadó, kiadási év nem szerepel benne) http://www.mech.uni-miskolc.hu/~paczelt/notes/VEM-ME-jegyzet.pdf

A negyedik jegyzet a miskolci egyetem honlapján elérhető. Mivel ez az egyik legátfogóbb magyar nyelvű anyag, amely a témakör legkiemelkedőbb hazai kutatóinak tollából származik, és ingyenesen elérhető, ezért minden hallgatónak ajánlom figyelmébe. Természetesen, ez a jegyzet messze túlmutat a „VEM alapjai” kurzus keretében előadott tanagyagon. Különösen hasznos lehet a jegyzet elején található matematikai áttekintés.
Kötelező tananyag az 53-60. oldalon található „Alapfogalmak” c. alfejezet. Ezen felül ajánlott elolvasni a teljes 3. fejezetet, noha annak csak töredéke tartozhat a jelen tantárgy anyagához.

Dr. Dezső Gergely, főiskolai tanár, tantárgyfelelős

A mechanika (fizika) fogalmai, amelyek a VEM-ben is fontosak

A szabadsági fok (degrees of freedom) széles körben használt kifejezés, az angol nyelvű szakirodalomban és számítógépes alkalmazásokban a rövidítése általában DOF. Ez a kifejezés, akárcsak a „merevségi mátrix” (stiffness matrix) vagy az „erővektor” (force vector) a szerkezetek mechanikájából származik, amely területen a VEM első alkalmazásait kifejlesztették. Ez a szóhasználat később átterjedt más területekre is.

A newtoni mechanika alapjaiból kiindulva a 18. században Euler és Lagrange alkotta meg a klasszikus analitikus mechanikát, amelyet Hamilton és Jacobi fejlesztett tovább. Ennek tárgya az elegendően nagy számú molekulából álló anyagi részecskéktől a repülőgépeken át a Naprendszer leírásáig terjed. (Az atomi méretű rendszerek vizsgálata a kvantummechanika, a galaktikus méretű rendszereké pedig a relativitáselmélet tárgya.) Az ilyen rendszerek térbeli konfigurációját a *szabadsági fokok* (DOF) segítségével adjuk meg. Ezeket *általánosított koordinátáknak* is nevezzük. Használatos még az *állapotváltozók*, vagy *elsődleges változók* kifejezések is, különösen a matematikai jellegű munkákban.

Amennyiben a szabadsági fokok száma véges, a rendszert *diszkrét*nek nevezzük, egyébként pedig *folytonos*nak. Mivel a VEM egy diszkretizáló eljárás, a VEM modell szabadsági fokainak száma szükségképpen véges. A szabadsági fokokat leíró adatokat egy oszlopvektorba szokás rendezni, amelynek jele: $\bar{u}$. Ezt *szabadsági fok vektor*nak, vagy *állapotvektornak* nevezik. Az $\bar{u}$ vektort *csomóponti elmozdulás vektor*nak is mondhatjuk, de ez csak a mechanikai alkalmazásokban használatos.

Az analitikus mechanikában minden szabadsági fokhoz tartozik egy „konjugált” vagy „duális” mennyiség, amit *általánosított erőnek* hívunk. A mechanikán kívüli alkalmazásokban is megvannak ezek a konjugált mennyiségek, amelyeket jobb híján szintén erőknek, vagy „kényszerítő hatásoknak” nevezünk. Ezek a hatások felelősek a változásokért. Az erőket szintén egy vektorba rendezzük, amelynek jele: $\bar{f}$. A mechanikában az $\bar{f}^T \cdot \bar{u}$ skalárszorzat a külső erők munkáját adja meg.

Ahogy a rácsos tartók feladatában, az $\bar{u}$ és $\bar{f}$ vektorok közötti összefüggést az általános esetben is lineárisnak és homogénnek feltételezzük. A homogenitás azt jelenti, hogy ha $\bar{u}$ nullvektor, akkor $\bar{f}$ is az. Ez a matematikai kapcsolat a merevségi egyenlettel (master stiffness equation) írható le:

$$\underline{\underline{K}}\,\bar{u} = \bar{f} .$$

A $\underline{\underline{K}}$ neve *merevségi mátrix* a nem mechanikai alkalmazásokban is, mivel nem született konszenzus más elnevezésről. Az $\bar{u}$ és $\bar{f}$ vektorok fizikai jelentése attól függ, hogy milyen feladatot oldunk meg.

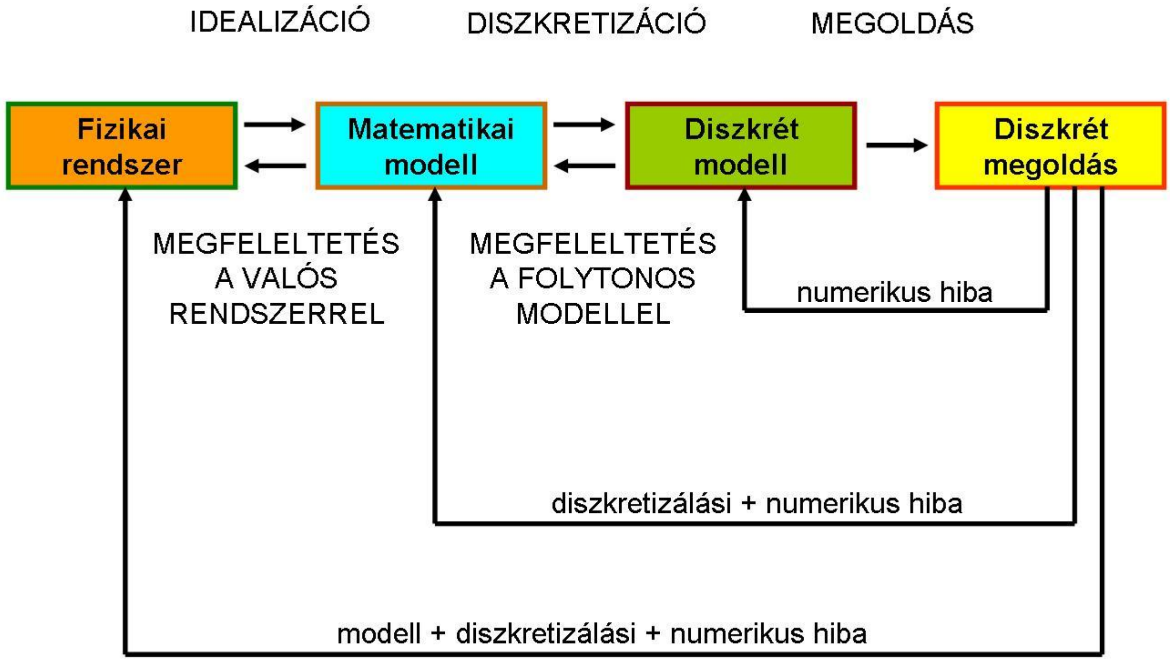
alkalmazási terület	$\bar{u}$ *jelentése (szabadsági fokok, DOF)*	$\bar{f}$ *jelentése (erők)*
szerkezetek és szilárd testek mechanikája	Elmozdulás	mechanikai erő
Hővezetés	Hőmérséklet	hőáram sűrűség
akusztikus folyadék	elmozdulás potenciál	részecskék sebessége
Potenciáláramlások	Nyomás	részecskék sebessége
általános áramlások	Sebesség	áramsűrűségek
Elektrosztatika	elektromos potenciál	töltéssűrűség
Magnetosztatika	mágneses potenciál	mágneses térerősség

Ha az erők és a szabadsági fokok közötti összefüggés nem homogén, akkor a merevségi egyenlet az alábbi alakban írható:

$$\underline{\underline{K}}\,\bar{u} = \bar{f}_M + \bar{f}_I\,,$$

ahol $\bar{f}_I$ a kezdeti csomóponti erővektor (később esik szó róla), amely alkalmas például mechanikai feladatokban a hőfeszültség figyelembevételére. $\bar{f}_M$ a külső erők vektora.

A végeselem módszer fő elvi lépéseit most általánosabb nézőpontból tekintjük át. Bár a figyelmünk középpontjában a mechanikai alkalmazások állnak, minden elvi lépés általánosítható és értelmezhető más típusú feladatokra is. Az 1. ábrán a VEM három fő lépése: az idealizáció, a diszkretizáció, a megoldás, és azok kapcsolatrendszere látható. Bár ez az ábra egyszerűsítésekkel él, mégis alkalmas a szóhasználat és az elv bemutatására. Mindegyik lépés hibák forrása. Az ábrán visszafelé történő mozgások („megfeleltetések") általában lényegesen nehezebbek, rosszul kondícionált feladatok.



1. ábra A VEM szimuláció lépései

Idealizáció

Az idealizáció a valós fizikai problémától a matematikai modellig vezető lépés. A műszaki gyakorlatban ez a legfontosabb lépés, mert nem gépesíthető. Ezt mindig ember végzi.

Modellek

A „modell" kifejezés hagyományosan egy tárgy kicsinyített, működőképes mását jelenti. A szótárak is így adják meg a jelentését. Azonban mi egy újszerű jelentésben használjuk ezt a szót, ami a számítógépek megjelenése óta egyre inkább elterjed:

A modell egy szimbolikus (elvont, absztrakt) gép, amelynek célja egy rendszer működésének leírása és előrejelzése bizonyos szempont(ok)ból.

Vegyük észre a „működés" és a „leírás bizonyos szempontból" kifejezések közötti különbséget.[1] Ahhoz, hogy egy rendszer működését előre jelezzük fizikai valóságában, magát a rendszert kell vizsgálnunk. A modell elvonatkoztat a valóságtól, és a vizsgálni kívánt szempontokból írja le a rendszert. A „szimbolikus" jelző azt fejezi ki, hogy a modell a

[1] "Minden modell rossz, de némelyik használható." (George Box)

rendszert egy másik tudományterület nyelvén reprezentálja. Például a műszaki rendszereket a matematika és/vagy az informatika nyelvén (jelrendszerével) írja le.

Matematikai modell

A *matematikai modellezés*, vagy *idealizáció* az a lépés, amellyel a mérnök a valós fizikai rendszertől annak *matematikai modell*jéig jut el. A modell kifejezést a fenti értelemben használjuk.

Azért hívjuk idealizációnak ezt a lépést, mert a matematikai modell szükségképpen elvonatkoztatással áll elő a fizikai rendszerből. (Emlékezzünk a „leírás bizonyos szempontból" kifejezésre.) A matematikai modellből nyert analitikus vagy numerikus eredmények csak a modellezéskor figyelembe vett szempontok szerint feleltethetők meg a valóságnak.[2]

Annak bemutatására, hogy a mérnök milyen döntési helyzetbe kerül az idealizáció során, képzeljük el, hogy egy sík lemezekből álló szerkezetet kell megvizsgálni, amelyet a lemezekre merőleges terhelések is érnek. Íme egy lista négy lehetséges matematikai modellről a teljesség igénye nélkül:

1. Nagyon vékony lemez modell a Kármán-féle csatolt membrán hajlítási modell elmélet alapján.
2. Vékony lemez modell, mint pl. a klasszikus Kirchoff-féle lemez modell.
3. Közepesen vastag lemez modell a Midlin-Reissner lemez elmélet alapján.
4. Vastag lemez modell a rugalmasságtan szerint, a lemezeket három dimenziós testként modellezve.

Attól a személytől, aki felelős az ilyen döntések meghozataláért elvárható, hogy ismerje mindegyik modell előnyét, hátrányát és érvényességük korlátait. Továbbá a döntés más lehet statikai és dinamikai vizsgálatok esetén.

A műszaki problémák egyre összetettebbek. Ahhoz, hogy a szimuláció lehetővé váljon, szükség van a komplexitás kezelhető mértékűre történő csökkentésére. A matematikai modellezés egy eszköz arra, hogy a komplexitást kezeljük. Ezt úgy érjük el, hogy kiszűrjük azokat a fizikai részleteket, amelyek a vizsgálat szempontjából nem lényegesek. Például egy kontínuum mechanikai modell nem veszi figyelembe a mikrokristályok alakját, és azt sem, hogy az anyag sok-sok milliárd atomból áll. A mérnök általában csak néhány eredő mennyiségre kíváncsi, mint egy hídszerkezet maximális lehajlása, vagy egy repülőgép rezgési alapmódusa. Bár a fizikus számára ezek a mennyiségek számtalan atom és molekula kölcsönhatásából erednek, ezeket a részleteket figyelmen kívül hagyjuk a modellalkotás során. Így egy matematikai modell kiválasztása úgy is felfogható, hogy egy információ-szűrőt alkalmazunk. A matematikai modellek különböznek egymástól abban, hogy mely információkat tartjuk meg, és melyeket szűrjük ki. Éppen ezért van különös jelentőssége az idealizáció során hozott döntésnek.

Implicit és explicit modellezés

Korábban említettük, hogy a … ábra egyszerűsítéseket tartalmaz.

Az ipari gyakorlatban általában a következő történik: meg kell vizsgálni egy szerkezetet, vagy részrendszert, amihez egy általános célú végeselem szoftver áll rendelkezésre. Az ilyen szoftverek a felhasználó számára elemkönyvtárakat kínálnak fel, amelyben található rúd-, gerenda-, memnbrán-, lemez- és 3D elemek stb. Abban a pillanatban, amikor egy végeselemet kiválasztunk, automatikusan elfogadjuk a hozzá tartozó matematikai modellt is. Ez az *implicit modellezés*. Ideális esetben a felhasználó tudatában van annak, hogy mi az, amit választott.

[2] Míg az idealizáció az egyetemi kurzusok témaköre lehet, az ellenkező irányú lépés, az eredményeknek a valósággal történő megfeleltetése a vizsgált rendszer működésének alapos fizikai megértését és tapasztalatot igényel, amely hosszú kutatási és szakmai gyakorlattal szerezhető meg.

Ennek a jegyzetnek az egyik fő célja, hogy az implicit modellezéshez szükséges „végeselemes alapműveltséget” átadja az olvasónak. Sajnos a kereskedelmi szoftverek sok felhasználója nincs tisztában az implicit modellezés e „magában foglaló” sajátosságával és a helyes alkalmazással.

A másik szélsőséges esetben az ember először legjobb tudása szerint kiválaszt egy matematikai modellt. Ezt követően vagy keres egy olyan kereskedelmi célszoftvert, amely tartalmazza annak a modellnek az implementációját, vagy nekiáll saját maga írni egy programot. Ez az *explicit modellezés*. Ehhez sokkal több technikai tudásra, tapasztalatra és érettségre van szükség, mint az implicit modellezéshez. Azonban különleges feladatok esetén valószínűleg ez a legmegfelelőbb választás.

A gyakorlatban elterjedt az implicit és explicit modellezés kombinációja. A fizikai feladatot, amelyet szimulálni kívánnak, részfeladatokra bontják. Azokat a részfeladatokat, amelyek általános eszközökkel kezelhetők, implicit modellezéssel oldják meg, és csak a különleges részfeladatokat vizsgálják explicit modellezéssel.

Diszkretizáció

A matematikai modellalkotás egy egyszerűsítő lépés. Azonban nem minden fizikai rendszer matematikai modellje elegendően egyszerű ahhoz, hogy megoldjuk azokat. Gyakran térbeli és idő változók szerinti csatolt parciális differenciálegyenletekkel állunk szemben, amelyekre peremfeltételek is vonatkoznak (bonyolult peremfeltételekkel megadott peremérték feladatok). Az ilyen feladatoknak végtelen sok szabadsági foka van.

Analitikus vagy numerikus?

Ezen a ponton el kell dönteni, hogy analitikus vagy numerikus megoldást keresünk. Az analitikus, ún. „zárt alakban megadható” megoldások intellektuális szempontból sokkal inkább kielégítők, különösen akkor, ha a feladatok széles körére érvényesek úgy, hogy az általános megoldásból a konkrét esetek megoldásai szabadon változtatható paraméterek behelyettesítésével kaphatók. Sajnos az ilyen megoldások csak szabályos geometriai tartományok és egyszerű peremfeltételek esetén léteznek. Ráadásul, bizonyos zárt alakban felírt megoldásokat, például az inverz integrál transzformációval felírtakat is numerikusan kell kiszámítani ahhoz, hogy a gyakorlatban alkalmazhatók legyenek.

A legtöbb feladat, amellyel a mérnök szembekerül, vagy nem oldható meg analitikusan, vagy aránytalanul nagy erőfeszítést igényelne az analitikus tárgyalásmód. A gyakorlati megoldás a numerikus szimuláció. Ez az a pont, ahol a végeselem módszer a képbe kerül.

A numerikus számítások elvégzéséhez szükség van arra, hogy a szabadsági fokok számát véges értékűre csökkentsük. Ezt a csökkentést nevezzük diszkretizációnak. A diszkretizáció eredményeképpen kapjuk a diszkrét modellt. Ahogy korábban említettük, a diszkrét modell többszintű részekre bontás eredménye is lehet.

A diszkretizáció lehet térbeli és időbeli. Ez a jegyzet nem foglalkozik az időbeli diszkretizációval.

Hibaforrások és közelítés

Az 1. ábrán láttuk, hogy a szimuláció minden lépése hiba forrása. A műszaki számításokban a modellezéssel (idealizálással) kapcsolatos hibák a legjelentősebbek. Azonban nehéz és költséges ellenőrizni azokat, mert ehhez a kísérleti adatokkal való összehasonlításra van szükség. Kísérleti adatból általában kevés van, vagy új termék kifejlesztésekor egyáltalán nincs.

A diszkretizációs hiba a második legfontosabb hibaforrás. Még ha a numerikus megoldás hibáját elhanyagoljuk is, – ezt legtöbbször megtehetjük – a diszkrét megoldás általában csak közelítése a matematikai modell egzakt megoldásának. Ennek az eltérésnek a mértéke a *diszkretizációs hiba*. Ennek a hibatípusnak a vizsgálata és jellemzése a numerikus matematikán belül egy külön tudományterület, az approximáció elmélet tárgya.

Mindenki ráérezhet arra, hogy a diszkrét modell megoldása javul, ha növeljük a szabadsági fokok számát, nullává válik, ha a szabadsági fokok száma a végtelenbe tart. Ez a pontatlanul megfogalmazott állítás nem más, mint a diszkrét modellekre vonatkozó konvergencia követelmény.

Más diszkretizációs módszerek

Korábban állítottuk, hogy a szerkezeti mechanikában a legnépszerűbb diszkretizációs eljárások a végeselem módszer és a peremelem módszer. A végeselem módszer messze a legelterjedtebb. A peremelem módszer népszerűsége abból fakad, hogy a feladatok egy bizonyos osztályát hatékonyan lehet vele tárgyalni, különösen azokat, amelyek végtelen tartományokat tartalmaznak. Mindazonáltal messze a második marad, és úgy tűnik, hogy kimerítette a lehetőségeit.

A nem szerkezeti alkalmazásokban, mint a folyadékok mechanikájában és az elektromágnesség területén a végeselem módszer terjed, de komoly vetélytárssal kell szembenéznie, ez a véges differenciák módszere. A véges differenciák és véges térfogatok módszere különösen alkalmas olyan hidrodinamikai feladatok megoldására, amelyekben a Reynolds-szám értéke nagy.

A végeselem módszer

A végeselem módszer (VEM) a szerkezeti mechanika domináns diszkretizációs technikája. A VEM tárgyalható fizikai és matematikai megközelítésben. Mi az előbbit választjuk.

Fizkai nézőpontból a VEM alapgondolata az, hogy a matematikai modellt egymással nem átfedő egyszerű geometriai tartományokra bontjuk, amelyeket *végeselem*eknek, vagy egyszerűen csak *elem*eknek hívunk. Az egyes elemek válaszfüggvénye (response - válasza a külső hatásokra, matematikai értelemben is válasz) kifejezhető véges számú szabadsági fok segítségével, amelyeket egy vagy több függvénynek a csomópontokban felvett értékeként kaphatunk meg. A matematikai modell válaszát a diszkrét modell válaszával közelítjük, amelyet az egyes elemek összekapcsolásával kapunk.

A szétválasztás és összeállítás gondolata magától értetődően vetődik fel, miközben természetes és mesterséges rendszereket vizsgálunk. Példa erre egy gép, híd, épület, repülőgép vagy az élőlények csontváza, amelyek egyszerűbb alegységekből épülnek fel.

A véges differencia modellekkel ellentétben a végeselemek nem fednek át egymással (diszjunktak). …

A végeselemek tulajdonságai

Ahogy korábban a rácsos tartó példáján láttuk, mindegyik taghoz tetszőleges típusú végeselem rendelhető hozzá, természetesen egyszerre csak egy. Az elemek egyedi tulajdonságait a többi elemtől függetlenül, külön-külön írhatjuk le, mintha nem is lennének kapcsolatban egymással. Ez a kulcsa az elemkönyvtárakon alapuló moduláris programozásnak.

A közvetlen merevség módszere (direct stiffness method) egy szétcsatolási és lokalizálási lépést tartalmaz, ami lehetővé teszi az elemek elkülönített kezelését. Az eljárás része az elemek szétválasztása a csomópontok elkülönítésével, majd az elemeket egy kényelmesen használható (elemhez rögzített, lokális) koordinátarendszerben írják le. Ezek után már csak az általános elemekkel kell foglalkozni: rúd elemekkel, gerenda elemekkel stb. A számítógép programozás szempontjából ez azt jelenti, hogy nem szükséges minden egyes végeselem jellemzőit külön-külön implementálni, hanem elegendő egy típusra egyszer megírni a kódot a megfelelő paraméterek beépítésével.

A következőkben áttekintjük, hogy egy végeselem milyen adatokkal jellemezhető. Ezeket az adatokat a végeselem szoftverek az elem szintű számításokhoz használják fel.

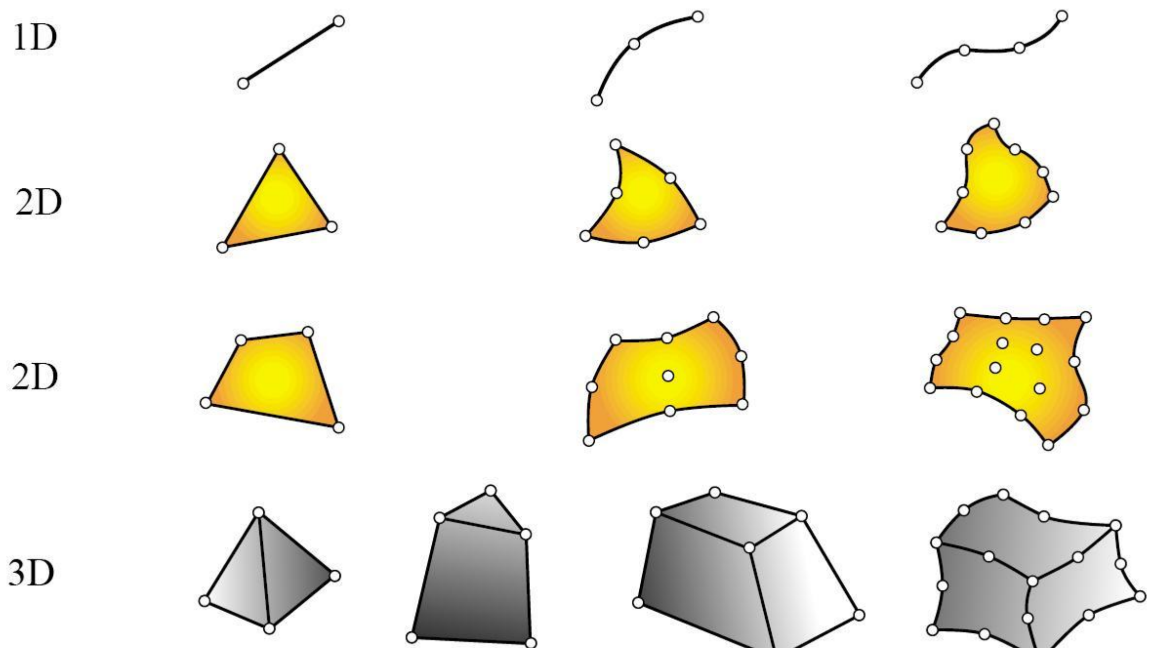
Kiterjedés

Az elemek egy- két- vagy háromdimenziósak lehetnek (1D, 2D, 3D).[3] Léteznek kiterjedés nélküli (nulla dimenziós) speciális elemek, például pontszerű rugók, pontszerű tömegek. Az elemek tényleges dimenziója kiterjeszthető kinematikai transzformációkkal, így például 1D elemekből, amilyenek a rúd és gerenda elemek, felépíthetők 2D vagy 3D szerkezetek is.

Csomópontok

Minden elem tartalmaz megkülönböztetett pontokat, amelyeket csomópontoknak hívunk (nodal point, node). A csomópontoknak kettős szerepük van: meghatározzák az elem geometriai jellemzőit, és a csomópontokhoz kapcsolódnak a szabadsági fokok is. Ha szükséges a megkülönböztetés, akkor beszélhetünk geometriai csomópontról és kapcsolódási csomópontról. Az általunk tárgyalt esetek többségében ezek egybeesnek.

A csomópontok általában az elemek végpontjai vagy csúcspontjain helyezkednek el, ahogy a 2. ábra is mutatja. Az ún. finomított vagy magasabb rendű elemek esetén további csomópontok lehetnek az éleken, lapokon vagy az elem belsejében is.



2. ábra Tipikus végeselem alakok és a csomópontok lehetséges elhelyezkedése

Alak (geometria)

Az elem alakját a geometriai csomópontok elhelyezkedése határozza meg. A gyakorlatban használt legtöbb elem alakja rendkívül egyszerű. Egy dimenzióban az elemek egyenes szakaszok vagy görbe vonaldarabok (szegmensek). Két dimenzióban háromszög vagy négyszög alakúak. Három dimenzióban a legelterjedtebb alakok a tetraéder (tetrahedron, tet), az ötoldalú (síklapokkal határolt) test (nevezik éknek vagy prizmának is, pentahedron, wedge), vagy a hatoldalú test (a kockaszerű/kuboid vagy „tégla” elnevezés is szokásos, brick, hexahedron, hexa). A 2. ábrán láthatók példák.

[3] A dinamikai vizsgálatokba az idő is egy további kiterjedésként építhető be.

Szabadsági fokok

Az elem szabadsági fokai az elem *állapotát* definiálják. Ezen felül egyfajta „kezelő eszközként” is funkcionálnak, amelyeken keresztül a szomszédos elemek csatlakoznak. A szabadsági fokok definíció szerint az elsődleges változónak a kapcsolódási csomópontokban felvett értékei (esetleg a deriváltjai). A konkrét kiválasztásuk később tárgyalandó szempontoktól is függ. Itt csak utalunk arra, hogy ez attól függ, hogy az elsődleges változó hogyan jelenik meg a matematikai modellben. Mechanikai elemek esetén az elsődleges változó az elmozdulás mező, és a legtöbb (de nem mindegyik) elem szabadsági fokai a csomóponti elmozdulás komponensek.

Csomóponti erők

A szabadsági fokokhoz egy-egy értelmű hozzárendeléssel mindig kapcsolódnak erők. Mechanikai elemek esetén az összefüggés energia elvekből származik.

Összetétel (anyagi) jellemzők

Mechanikai elemek esetén ezek adják meg az anyag tulajdonságait. Például lineáris, rugalmas rúdelemre elegendő megadni az E rugalmassági együtthatót és az α hőtágulási együtthatót.

Gyártási (alkatrész jellegű) sajátosságok

Mechanikai elemeknél azokra a gyártásból származó sajátosságokra kell gondolnunk, amelyek csak összesítve jelennek meg az elem tulajdonságai között, úgymond kiintegráljuk azokat az elem kiterjedéséből. Például ilyenek a gerenda elemek keresztmetszeti jellemzői, vagy a lemez és héjelemek vastagsága.

Számítógépes alkalmazások esetén a fentebb említett adatok beépülnek egy megfelelő adatstruktúrába. Ezeket felhasználják az elemgeneráló eljárások arra, hogy lokális koordinátarendszerben kiszámítsák az elemek merevségét.

A mechanikai elemek osztályozása

A szerkezeti mechanikában használt végeselemek alábbi csoportosítása nagyjából azon alapul, hogy azok kiterjedésüket tekintve mennyire vannak „közel” az eredeti fizikai rendszerhez, amit vizsgálunk. A csoportosítás célja egyrészt az, hogy tisztázzon olyan fogalmakat, amelyek később ismét megjelennek majd a tananyag későbbi részeiben, másrészt, hogy betekintést adjon olyan korszerű modellezési technikákba, mint a hierarchikus finomítás és a globális-lokális analízis.

Primitív (egyszerű) szerkezeti elemek

Hasonlítanak a valódi szerkezeti elemekre. A *primitív* jelző megkülönbözteti ezeket a makroelemektől, amelyekről később esik szó. A primitív azt jelenti, hogy nem bonthatók fel további, egyszerűbb elemekre.

Ezek az elemek általában az anyagok mechanikájának egyszerűsített modelljein alapulnak, és sokkal könnyebb megérteni azokat fizikai megfontolások alapján, mint matematikai megközelítésből. Ilyenek például a rúd, gerenda stb. elemek.

Kontinuum elemek

Egyáltalán nem emlékeztetnek a valódi szerkezetekre. Folytonos tömegeloszlású testek felosztásából származnak, vagy folytonos közegként felfogott szerkezeti elemekből.

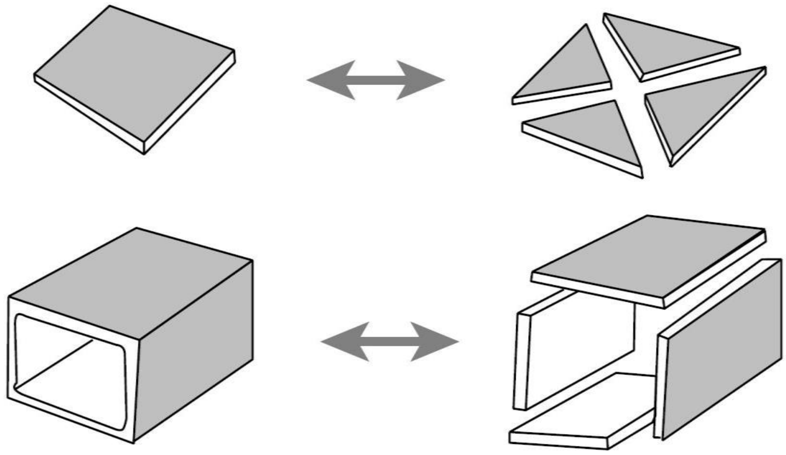
A szerkezeti (primitív) elemekkel ellentétben a kontinuum elemeket egyszerűbb megérteni matematikai leírásuk alapján. Ilyenek például a lemez, héj, tengelyszimmetrikus térbeli, vagy az általános térbeli szilárd elem.

Speciális elemek

A speciális elemek rendelkeznek a szerkezeti vagy kontinuum elemek tulajdonságaival, de ezen felül még olyan sajátosságaik is vannak, amelyek a feladat speciális fizikai jellegéből adódnak. Például ilyenek a repedést szimuláló elemek (amelyeknek egyik csomópontjuk kettős), nyíródó panel elemek, végtelen, vagy „majdnem végtelen” elemek, érintkezési és büntető (-függvényekhez járulékot adó) elemek, merev test elemek.

Makroelemek

A makroelemeket szokás elemcsomagnak (mesh unit) vagy szuperelemeknek is nevezni, bár ez utóbbi átfed a következő részben tárgyalt alstruktúrákkal. A makroelemek hasonlítanak bizonyos szerkezeti elemekre, legfontosabb jellemzőjük, hogy egyszerű elemekből épülnek fel (3. ábra).



3. ábra Makroelemek

A makroelemek használatának fő célja az előfeldolgozás egyszerűsítése. Például egyszerűbb egy 2D felosztást definiálni négyszög elemekkel, mint háromszög elemekkel. Az a tény, hogy a háttérben a négyszög elemek valójában háromszög elemekből állnak, a legtöbb felhasználó számára nem fontos. Hasonlóan, a doboz alakú makroelemek használata időt takaríthat meg ilyen jellegű szerkezetek vizsgálatakor pl. szekrényes (üreges) tartószerkezet, híd.

Alszerkezetek (substructures)

Szerkezeti modul vagy szuperelem néven is ismertek. Az elemek olyan halmaza, amely pontosan definiált szerepet tölt be a szerkezetben, tipikusan egy nagyobb szerkezet részekre osztásából adódnak. Példák: egy repülőgép szárnyai és törzse, egy hídszerkezet tornyai, hordfelülete és tartókábelei.

A makroelemek és alstruktúrák között nincs éles megkülönböztetés. Az alszerkezetek általában „felülről lefelé” való gondolkodásból adódnak, a makroelemek pedig „alulról felfelé” építkező gondolkodásból. A szuperelem kifejezés gyakran gyűjtőnévként szerepel magába foglalva mindkét elemtípust.

<u>Összeállítás</u>

A teljes modell felépítése két fő lépés tartalmaz:

Globalizáció: az elemeket leíró egyenleteket egy közös, globális koordináta-rendszerbe transzformálják, ha szükséges.

Összefűzés: az egyes elemekre külön-külön felírt merevségi egyenleteket egyetlen, közös merevségi egyenletté állítják össze megfelelő indexelés bevezetésével és sorok, oszlopok beszúrásával a mátrixokba. A globális merevségi egyenlet sok ezer, vagy több millió szabadsági fokú is lehet, emiatt számítógépes alkalmazások használata, vagy készítése szükséges.

Peremfeltételek

A VEM fő erőssége, hogy alkalmazása során könnyen és elegánsan kezelhetők a peremfeltételek és kapcsolódási feltételek. Ennek az erősségnek azonban árnyoldala is van. A kezdő VEM felhasználók számára komoly kihívást jelent megérteni és helyesen kezelni a peremfeltételeket. Itt egy rövid leírást adunk a peremfeltételekről, a következő fejezet részletesebben tárgyalja azokat.

Lényeges és természetes peremfeltételek

A legfontosabb, amire emlékeznünk kell az, hogy a peremfeltételek alapvetően két módon jelentkezhetnek, ezek: lényeges és természetes.

Lényeges peremfeltételek: közvetlenül befolyásolják a szabadsági fokokat, a bal oldali $\bar{u}$ vektorra alkalmazzuk azokat.

Természetes peremfeltételek: a szabadsági fokokat nem befolyásolják közvetlenül, s jobb oldali $\bar{f}$ vektorra alkalmazzuk azokat.

A matematikai igazolást későbbre hagyjuk, a recept a következő:

1. Ha egy peremfeltétel közvetlenül tartalmaz egy vagy több szabadsági fokot, akkor *lényeges*nek nevezzük. Példa: előírt csomóponti elmozdulás.
2. Minden más esetben a peremfeltétel *természetes*.

A „közvetlenül” kifejezés céja az elsődleges függvények deriváltjainak kizárása, hacsak nem maguk a deriváltak a szabadsági fokok, mint például gerendákban és lemezekben az elfordulás (rotáció).

Peremfeltételek szerkezeti feladatokban

A mechanikai feladatokban a lényeges peremfeltételek elmozdulásokat tartalmaznak (de nem megnyúlás jellegű deriváltakat). Egy épület vagy híd alátámasztását megadó feltételek egyszerű példák erre. Azonban vannak sokkal általánosabb peremfeltételek, amelyek megjelennek a gyakorlatban. A mérnöknek ismernie kell az alábbi elmozdulás peremfeltétel típusokat:

Talaj vagy támasz feltétel. Közvetlenül megtiltja a szerkezet merev test szerű elmozdulásait.

Szimmetria feltételek. Szimmetria vagy antiszimmetria megszorításokat alkalmaz a szerkezet valamely szimmetria síkjára, tengelyére vagy pontjára. Ez lehetővé teszi, hogy a diszkretizáció során a rendszernek csak egy részére végezzük el a számítást, és így csökkenjen a modellezésbe fektetett munka, és a megoldandó egyenletek száma.

Elhagyható szabadsági fokok. Azoknak az elmozdulásoknak a figyelmen kívül hagyása, amelyek lényegtelenek a feladat megoldása szempontjából. Még a végeselem programok gyakorlott felhasználóit is megzavarja időnként ez a fajta peremfeltétel. Példa: egy sima héjszerkezet felületére merőleges forgási szabadságfok.

Kapcsolódási feltételek. A szomszédos szerkezetekkel, alszerkezetekkel való kapcsolódást biztosítják, vagy összefüggéseket adnak meg a szabadságfokok között. Az ilyen feltételek közül sokat a többpont feltételek vagy több szabadsági fokra vonatkozó feltételek (multipoint constraints, multifreedom constraints) címszó alatt emlegetik. Ezeket numerikus szempontból rendkívül nehéz kezelni.

A segédlet következő része önmagában is érthető egységet képez. Rövid bevezető után példákon keresztül mutatja be azt, hogy a végeselem módszer alkalmazásakor milyen szerepet kap a mátrix formalizmus.

A végeselem módszer helye a tudományban

Annak ellenére, hogy a végeselem módszer a természettudomány szinte minden területén alkalmazható, a jelen fejezet csupán a mechanikán belül kívánja megmutatni a helyét. Ennek oka kettős. A módszer első gyakorlati alkalmazásai, amelyek a fejlődésére is döntő hatást gyakoroltak, mechanikai jellegűek voltak. Másrészt, ha megértjük a mechanikán belüli szerepét, könnyen általánosíthatjuk azt a többi tudományterületre.

A fizika általában, és vele együtt a mechanika az alábbi területekre osztható:

- Kísérleti fizika/mechanika: a jelenségek megfigyelésekkel és kísérletekkel való vizsgálatát jelenti, célja az ismeretszerzés.
- Elméleti fizika/mechanika: célja a meglévő ismeretek átfogó rendszerbe foglalása, elsősorban matematikai eszközökkel, deduktív úton.
- Alkalmazott fizika/mechanika: a rendelkezésre álló tudományos ismeretek technikai, ipari alkalmazását, közvetlen hasznosítását jelenti.
- Számítógépes fizika/mechanika: a XX. Század szülötte, a számítástudomány fejlődésének köszönheti létrejöttét. Célja a jelenségek, vagy tudományos hipotézisek számítógépes modellezése, módszere a matematikai modellek számítógépes implementálása. Bármilyen jelenségre vonatkozóan végezhetünk számításokat, ha rendelkezésünkre áll annak vélt vagy valós matematikai modellje, azt beprogramozzuk, és van egy számítógépünk, amely képes belátható időn belül elvégezni a szükséges műveleteket (ez néha nem is annyira magától értetődő). A számítógépes fizikát azért szokás külön területként emlegetni, mert sajátosan kapcsolódnak össze benne a fizika, számítástudomány és a matematika ismeretanyagai. A számítógépes fizikát leggyakrabban elméleti vagy alkalmazott fizikai vizsgálatokra használják.

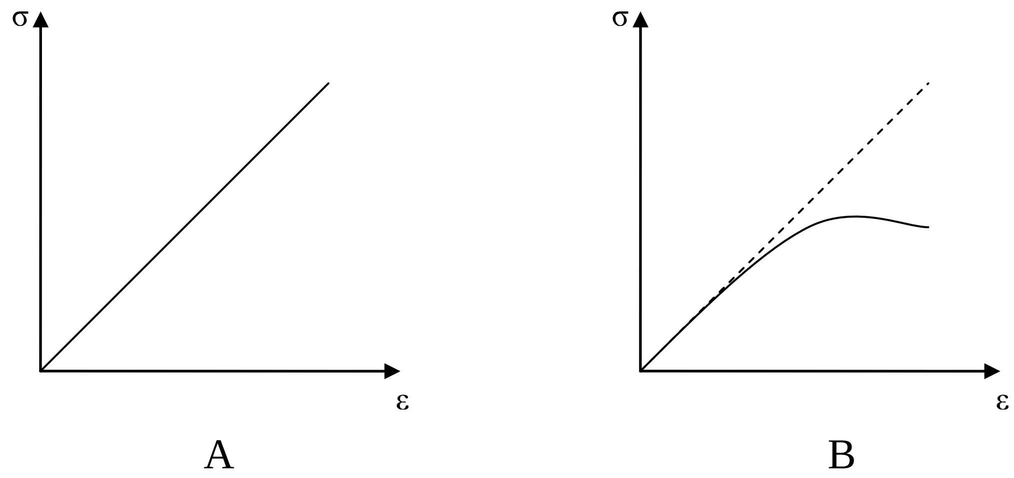
A végeselem módszer egy matematikai eljárás, amely könnyen programozható, és ezért a számítógépes fizika ill. mechanika egyik legelterjedtebb eszköze.

A feladatok osztályozása

A számítógépes mechanika témakörei a vizsgált rendszer méreteinek nagyságrendje alapján tovább **csoportosítható** nano- és mikromechanika, kontinuummechanika (szilárd testek, folyadékok, többfázisú rendszerek), és rendszerek mechanikájára.

A kontinuummechanikában megkülönböztetjük a dinamikai és a sztatikai feladatokat. A dinamikai problémák esetén időfüggő jelenségeket vizsgálunk úgy, hogy figyelembe vesszük a tehetetlenségi erőket is. A sztatikai problémák további két nagy csoportra oszthatók. Az első esetben időfüggetlen jelenségeket vizsgálunk. A második csoportba az ún. kvázi-sztatikus feladatok tartoznak, amelyek időfüggők ugyan, de az esetlegesen fellépő tehetetlenségi erőket mégsem vesszük figyelembe. Ennek több oka lehet: sok esetben ez egy dinamikai jelenség közelítő vizsgálata.

A fizikai modellezéssel kapcsolatosan meg kell említenünk még a **linearitás** fogalmát. Egy feladat lineáris, ha a „kiváltó ok” → „válasz” folyamatban a válasz lineáris, ami azt jelenti, hogy kétszer akkora „kiváltó ok” kétszer akkora „választ” eredményez. Például a Hooke-törvény prizmatikus rúd húzása esetén az alábbi egyszerű alakban várható: $\sigma = E \cdot \varepsilon$, ahol σ a rúd tetszőleges keresztmetszetében ébredő feszültség, ε a relatív megnyúlás, E pedig a rugalmassági együttható. Világos, hogy kétszer nagyobb feszültség esetén kétszer nagyobb lesz a rúd megnyúlása. A Hooke-törvény lineáris anyagtörvény. A rugalmas rúd húzása lineáris feladat. A Hooke-törvény tenzorokkal megfogalmazott $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}\,\underline{\underline{\varepsilon}}$ alakja is lineáris (a C egy negyedrendű tenzor). Ha egy feladat nem lineáris, akkor nemlineárisnak nevezzük. Például, ha a rúd húzásának modellezésekor nem a Hooke-törvényt, hanem a szakítódiagramot vesszük figyelembe, akkor a feladat nemlineárissá válik.



1. ábra A Hooke-törvény (A) és a szakítási diagram (B)

A végeselem módszerrel vizsgálhatunk dinamikai, sztatikai, lineáris és nemlineáris feladatokat egyaránt. Legszemléletesebben a lineáris sztatikai feladatok tárgyalhatók.

A végeselem módszer gondolatmenete

A környezetünkben megfigyelhető jelenségek általában oly összetettek, hogy teljes egészükben nem vagyunk képesek tanulmányozni azokat. Az emberi elme különleges képessége az, hogy részekre tudja osztani az őt körülvevő világot, a részeket külön tudja vizsgálni, majd a részek tulajdonságaiból következtetni tud egy összetett rendszer lehetséges viselkedésére. Például

a.) a mérnök az acélrudak jellemzői alapján megtervezhet egy bonyolult rácsos tartószerkezetet

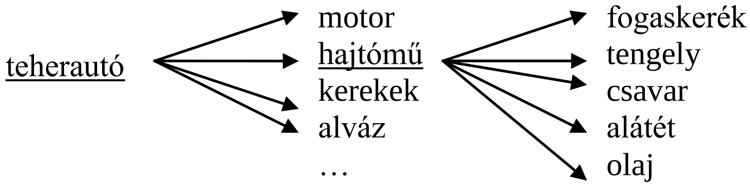
b.) ha a gazda ismeri a növények szükségletei, akkor optimálisan tudja működtetni egész gazdaságát

c.) amióta I. Newton felismerte a gravitációs erőtörvényt, azóta lehetséges nagyszámú égitestből álló rendszerek mozgásformájának tanulmányozása és leírása viszonylag nagy pontossággal

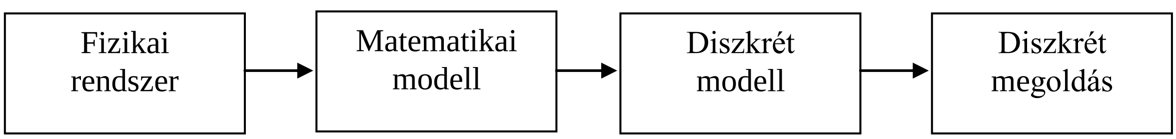
Nemcsak a VEM, hanem a legtöbb tudományos vizsgálat kulcslépése az, hogy megkeresse azokat a legegyszerűbb építőelemeket, amelyek még hordozzák az egész rendszer minden lényeges tulajdonságát (például a kémia esetében igen látványos ez a gondolkodásmód: az atomok és molekulák tulajdonságaira vissza lehet vezetni az anyagi halmazok legtöbb kémiai sajátságát). Ezeknek az elemeknek a vizsgálata, viselkedésük (matematikai) leírása egyszerűbb feladat, mint az egész rendszert vizsgálni. Itt azonban nem ér véget a munka. A részek egymáshoz való kölcsönhatásának ismeretében azt is meg kell mondani, miként működik a belőlük összeállított egész rendszer.

A végeselem módszer esetén mind a **részekre bontás, mind az összeállítás** több lépésben történhet, az eredeti rendszer bonyolultságától függően.

A részekre bontásnak két jellegzetes megvalósítását ismerjük. Egy sok alkatrészből álló műszaki rendszert alrendszerekre, majd alkatrészekre bontunk, pl.:



Ez megfelel egy képzeletbeli szétszerelésnek, mely (miként az ábra is sugallja,) több szinten valósul meg. Egy-egy alkatrész azonban önmagában még mindig túl bonyolult rendszer a közvetlen (pl. kontinuummechanikai) számításokhoz (pl. egy ferde fogazású fogaskerék). Ezért ezt tovább bontjuk. Az alkatrész egy folytonos közegből felépülő test, amit gondolatban helyettesítünk véges számú összetevővel, ez a diszkretizáció. A diszkrét rendszer az eredeti kontinuumnak egy helyettesítése, amely a mátrixalgebra eszközeivel leírható. A végeselemek a diszkrét rendszer „építőkövei”.
A VEM második fontos lépése a végeselemekből az egész rendszer (pl. fogaskerék) modelljének összeállítása. Ez matematikai értelemben az elemek kis mátrixaiból egy nagy mátrixegyenlet felépítését jelenti. Így létrejön a fizikai rendszer ún. diszkrét modellje.
A diszkrét modell megoldása az ún. diszkrét megoldás, amely az eredeti rendszer viselkedésének egyfajta közelítése.
A diszkrét megoldás két fő hibával terhelt, amelyek mértékét az eredmények felhasználása előtt ellenőrizni kell. **Az első hibaforrás az ún. idealizációból ered**. A valós fizikai rendszer bizonyos, általunk lényegesnek tartott tulajdonságait beépítjük a diszkrét modellünkbe, más tulajdonságokat viszont nem (pl. lehet, hogy egy sztatikai számítás esetén figyelmen kívül hagyhatjuk a hőmérséklet hatásait – ez lehet jogos, de lehet, hogy nem az). A figyelembe vett fizikai paraméterek mértékszámai mérési eredményeken alapulnak, így ezek is bizonyos hibával terheltek (pl. rugalmassági együttható, hővezetési tényező). **A fizikai rendszer alakját a diszkrét modell bizonyos hibával közelíti.** Mindezek tehát az idealizációból és a diszkretizációból fakadó hibák. A másik hibaforrás matematikai jellegű. Abból adódik, hogy a diszkrét modellt, mint matematikai feladatot általában nem lehet egzaktul megoldani, hanem annak egy közelítését adhatjuk meg.



Erről a későbbiekben részletesebben is szó esik majd. Összefoglalva, a VEM fő hibaforrásai:

- Idealizációból (modellalkotásból) fakadó hiba
- Diszkretizáció hibája
- A matematikai megoldás hibája (numerikus hiba)

A mátrixok alkalmazása a végeselem módszerben

A diszrét rendszerek számításakor, így a végeselem analízis megvalósítása során is, a mátrixok és mátrixműveletek központi szerepet játszanak. Ez megjelenik a szóhasználatban, sok elnevezés és fogalom is utal erre. Nem érthető meg a végeselem módszer lényege, és nem tisztázhatók a legfontosabb fogalmak anélkül, hogy ne látnánk bele a VEM matematikai hátterének alapjaiba. Ezért az alábbiakban két leegyszerűsített példát mutatunk be erre.

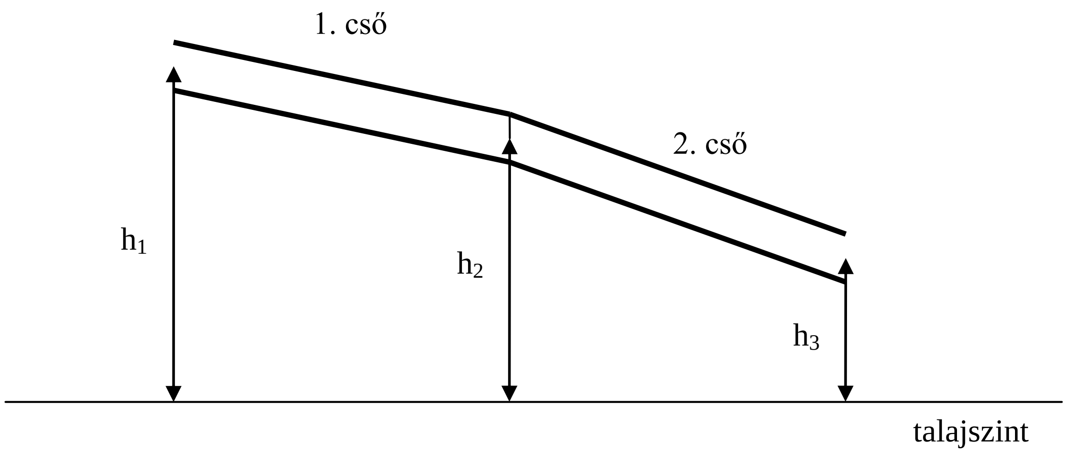
Bevezető példa: a vízvezeték rendszer

Ez a példa megmutatja, hogy írjuk le a diszkrét rendszereket. Egy vízvezeték rendszert vizsgálunk, amely egyenes csődarabokból áll.

Ebben a példában

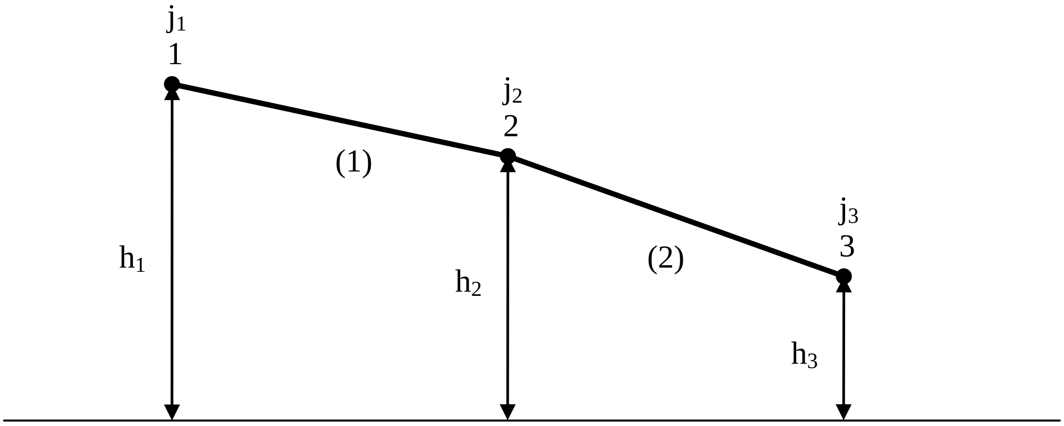
- *az idealizáció*: a vízvezeték rendszer számos fizikai tuajdonságától való elvonatkoztatás, hiszen nem vesszük figyelembe a csövek anyagát, keresztmetszeti jellemzőit, belső felületének minőségét, az esetleges csatlakozások, szelepek szűkítő hatását és számtalan más tulajdonságot sem, kizárólag a csődarabok végpontjainak magasságát.
- *a matematikai modell*: az az elképzelés, hogy a folyadék áramerőssége egy csőben a cső végpontjainak magasságkülönbségével arányos, valamint a csőrendszer térbeli elhelyezkedése, de ez most nem okoz nagy kihívást, mert igen leegyszerűsített.
- *a diszkrét modell*: a csőrendszer felosztása egyenesnek tekintett (most valóban egyenes) darabokra, az egyes darabok matematikai leírása külön, és a teljes rendszer matematikai leírása az egyes elemekből származtatva. Ezt később látjuk. Ebben a példában erre fektetjük a legnagyobb hangsúlyt.
- *a megoldás*: az előző lépésben nyert mátrixegyenlet megoldása.

A csődarabok vízáteresztő képessége arányos a végpontjaik magasságkülönbségével. Két ilyen egyenes csődarab találkozási pontjában víz léphet ki a rendszerből, vagy léphet be abba. A csőhálózat működését folyamatosnak és állandósultnak képzeljük el.



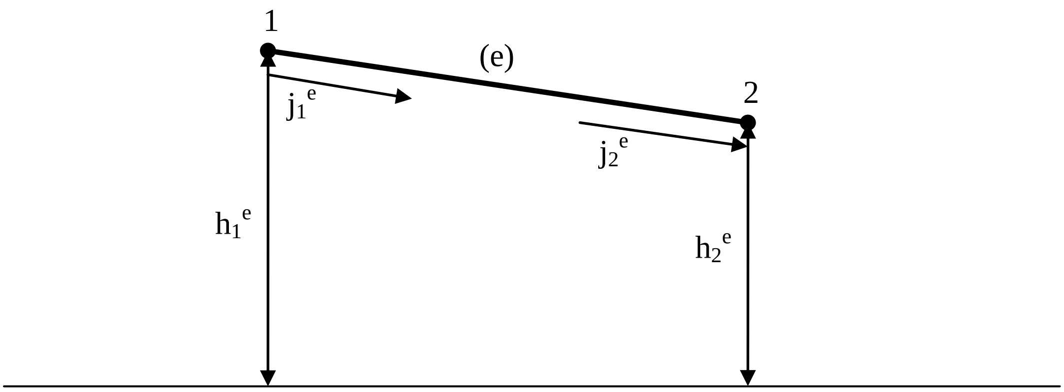
2. ábra: A fizikai rendszer

A csődarabok végpontjainak magasságát h betű jelöli, a végpontokat megszámozzuk. A fizikai rendszer modellje két elemből áll, amelyeket végpontjaik magasságával jellemzünk.



3. ábra: A vízvezeték rendszer diszkrét modellje

A diszkrét modell (1) számú eleme az 1. csőnek felel meg. Vegyük észre: a modell nem tartalmaz információkat a cső keresztmetszetéről, a cső falának anyagáról, a hőmérsékletről, stb. A modell csak a csövek végeinek magasságkülönbségét ismeri, a csőben áramló folyadék áramerősségét, illetve ezen mennyiségek közötti matematikai kapcsolatokat adja meg (ld. alább).
Fontos hangsúlyozni azt is, hogy ebben a feladatban csak olyan megoldásokat keresünk, amelyek a csőrendszeren belüli stracionárius áramlást írja le azzal a feltételezéssel, hogy a csövek végein, beleértve a csatlakozási pontokat is, van lehetőség arra, hogy a szükséges mennyiségű víz ki- vagy belépjen a csőrendszerbe.
Először egy bizonyos elem tulajdonságait vizsgáljuk meg. Legyen az elem sorszáma e=1,2.



4. ábra

Az elem 1. végpontjának magassága h_1^e, a 2. végpont magassága h_2^e . Az 1. végponton befolyó víz áramsűrűsége j_1^e , a 2. végpontban ugyanez a mennyiség j_2^e. Korábban említettük, hogy a csővezeték vízáteresztő képessége arányos a végpontjának magasságkülönbségével. Ezt így fejezzük ki matematikai alakban:

$$j_1^e = c(h_1^e - h_2^e)$$

Azt is tudjuk, hogy a tömegmegmaradás miatt, amennyi folyadék beáramlik az egyik végpontban, annyi fog kiáramlani a másik végpontban:

$$j_2^e = -j_1^e = -c(h_1^e - h_2^e) = c(-h_1^e + h_2^e)$$

A fenti formulában c egy tetszőleges arányossági tényező. Az egyszerűség kedvéért most c=1. Vezessük be a következő vektorokat:

$$\overline{j^e} = \begin{bmatrix} j_1^e \\ j_2^e \end{bmatrix}; \ \overline{h^e} = \begin{bmatrix} h_1^e \\ h_2^e \end{bmatrix} \ ;$$

Az áramerősségek és a magasságok közötti, fenti összefüggések így egyszerűbb formában írhatók le:

$$\begin{bmatrix} j_1^e \\ j_2^e \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^e \\ h_2^e \end{bmatrix};$$

vagy

$$\overline{j^e} = \underline{\underline{K}}^e \overline{h^e}$$

Végezzük el a mátrix műveleteket, hogy ellenőrizhessük a formuláink helyességét! A

$$\underline{\underline{K}}^e = c \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} m^2/h$$

mátrixot az (e) elem merevségi mátrixának nevezzük. Példánkban

$$\underline{\underline{K}}^{(1)} = \underline{\underline{K}}^{(2)} = c \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} m^2/h$$

Amikor a véges elem viselkedését leírtuk, akkor az elemhez kapcsolt lokális viszonyítási rendszert használtunk. Ez abban nyilvánult meg, hogy az általánosan elképzelt (e) elem baloldali végpontját 1. a jobboldalit pedig 2. sorszámmal láttuk el.

Ezen a ponton eljutottunk a részekre bontás végéig. Megadtuk a csőrendszer diszkrét modellje építőelemeinek matematikai leírását. Most átlépünk a modellalkotás második fázisába: az egyes véges elemekből összeállítjuk a teljes modellt. Ez azt jelenti, hogy a teljes modellt jellemző fizikai mennyiségek közötti kapcsolatot kell megadnunk mátrixegyenlet formájában.

Az egyes elemekre használt lokális jelölésekről most át kell térnünk a teljes modellre vonatkozó jelölésekre. Ez elsősorban a csomópontok sorszámozására vonatkozik, és ezzel együtt az áramerősségek és magasságok indexelésére is. Az (1) elemnél nincs változás. A (2) elemnél így alakulnak a jelölések:

$$\bar{j}^{(2)} = \begin{bmatrix} j_2^{(2)} \\ j_3^{(2)} \end{bmatrix}; \ \bar{h}^{2} = \begin{bmatrix} h_2^{(2)} \\ h_3^{(2)} \end{bmatrix};$$

Gondoljuk át, hogy ebben a rendszerben a víz honnan hová áramolhat. A rendszer (diszkrét modell) összetevői: az 1., 2. és 3. csomópontok, és az (1), (2) végeselemek. A végeselemek a csomópontokban találkoznak egymással. Minden egyes csomópontba be-és kiáramolhat a víz a hozzá csatlakozó csövekből, illetve a környezetből. Például a 2. csomópontba áramolhat víz az (1) csőből, a (2) csőből és a környezetből (mondjuk egy csapon keresztül).

A tömegmegmaradás törvénye a 2. csomópontra is igaz, ami az eddig bevezetett jelölésekkel így írható:

$$j_2^{(1)} + j_2^{(2)} = j_2$$

A $j_2^{(1)}$ és $j_2^{(2)}$ akkor pozitív, ha az (1) ill. (2) elemekbe a 2. csomópontból befelé áramlik a víz, a j_2 pedig akkor pozitív, ha a környezetből a 2. csomópontba áramlik a víz. A fenti egyenlet azt fejezi ki, hogy amennyi víz elfolyik az (1) és (2) elemekbe, annyit kell pótolni a rendszerbe kívülről a 2. csomópontban (ha minden mennyiség pozitív). A $\underline{\underline{K}}^{(2)}$ merevségi mátrixának indexelése is megváltozik.

$$\underline{\underline{K}}^{(2)} = \begin{array}{c} \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (2) & (3) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

A globális indexelés használatának megkönnyítése érdekében minden áramerősség vektort és merevségi mátrixot kiegészítjük a harmadik indexnek megfelelő elemmel, illetve nulla sorokkal és oszlopokkal:

$$\bar{j}^{(1)} = \begin{bmatrix} j_1^{(1)} \\ j_2^{(1)} \\ j_3^{(1)} \end{bmatrix} \; ; \quad \bar{j}^{(2)} = \begin{bmatrix} j_1^{(2)} \\ j_2^{(2)} \\ j_3^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}^{(1)} = c \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{m}^2/\mathrm{h} \; ; \qquad \underline{\underline{K}}^{(2)} = c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{m}^2/\mathrm{h}$$

A magasság vektor pedig így alakul:

$$\bar{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

ezzel:

$$\bar{j}^{(1)} = \underline{\underline{K}}^{(1)} \bar{h} \; ; \quad \bar{j}^{(2)} = \underline{\underline{K}}^{(2)} \bar{h}$$

Ez volt a globalizáció: lokális jelölésekről áttértünk a globális jelölésekre. Most következik az összefűzés.

A tömegmegmaradás egy tetszőleges csomópontban:

$$j_i^{(1)} + j_i^{(2)} = j_i$$

$$\sum_{k=1}^{3} K_{ik}^{(1)} h_k + \sum_{k=1}^{3} K_{ik}^{(2)} h_k = j_i$$

$$\sum_{k=1} (K_{ik}^{(1)} + K_{ik}^{(2)}) h_k = j_1$$

Mindez összefoglalható az alábbi mátrixegyenlet formájában.

$$\underline{\underline{K}} \bar{h} = \bar{j}$$

Itt $\underline{\underline{K}}$ a teljes diszkrét rendszer merevségi mátrixa.

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}^{(1)} + \underline{\underline{K}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{m}^2/\mathrm{h} \; ;$$

Ez az egyenlet kapcsolatot teremt a csomópontok magassága és az abba a környezetből befolyó áramerősségek között. A h és j vektorok összesen 6 skalár komponense közül csak 3 lehet ismeretlen.

Lássuk a legegyszerűbb példát, és azt, hogy mit tudhatunk meg a csőhálózatról a felállított modellünk segítségével!

Legyen adott a három csomópont magassága: h_1=25 m, h_2=10 m, h_3=5 m. (c=1) Ekkor:

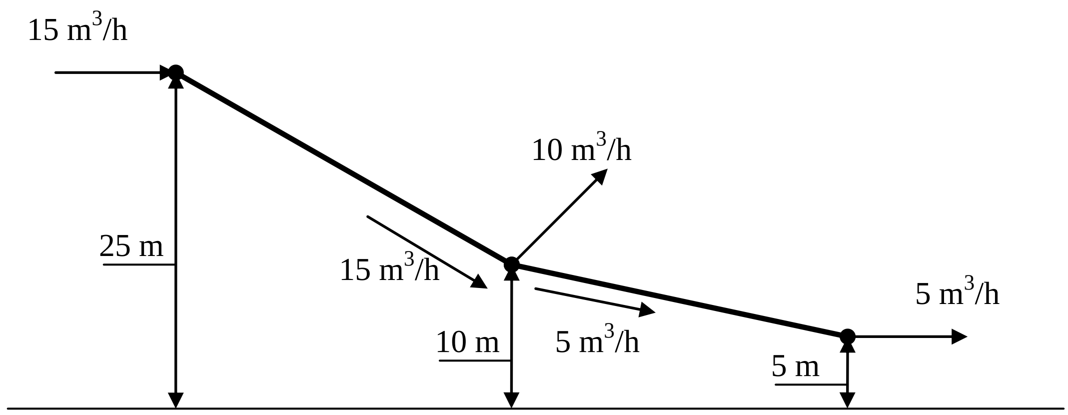
$$\underline{\underline{K}}\,\bar{h} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \\ -5 \end{bmatrix} m^3/h = \bar{j}$$

Ezzel megtudtuk a csomópontok és a környezet közötti víz áramerősségét. Vajon mi zajlik az egyes elemeken belül?

$$\underline{\underline{K}}^{(1)}\bar{h} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} m^2/h \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} 15 \\ -15 \\ 0 \end{bmatrix} m^3/h = \bar{j}^{(1)}$$

$$\underline{\underline{K}}^{(2)}\bar{h} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} m^2/h \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} m^3/h = \bar{j}^{(2)}$$

Az eredményeket az alábbi ábrán foglalhatjuk össze:



5. ábra

A rendszer modellje alkalmas más jellegű számítások elvégzésére is. Írjuk elő, hogy $j_1=10$ m^3/h, $h_2=20$ m és $j_3=-15$ m^3/h legyen, és a feladat az, hogy számítsuk ki, milyen j_2, h_1 és h_3 esetén valósítható ez meg. Egyenletünk most az alábbi:

$$\underline{\underline{K}}\,\bar{h} = \bar{j}$$

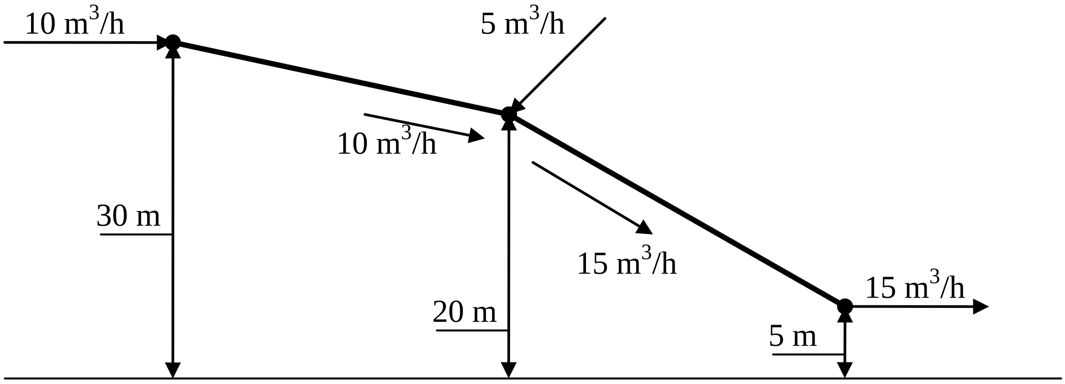
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} m^2/h \begin{bmatrix} h_1 \\ 20 \\ h_3 \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} 10 \\ j_2 \\ -15 \end{bmatrix} m^3/h$$

Most a megoldás nem olvasható ki közvetlenül ebből az összefüggésből, hanem meg kell oldanunk az egyenletet. A mátrix műveletek elvégzése után az alábbi alakba hozható ez a feladat:

$$h_1 - 20 = 10$$
$$-h_1 + 40 - h_3 = j_2$$

$$-20 + h_3 = -15$$

Az egyenlet megoldása:
h_1=30 m; h_3=5m; j_2=5 m^3/h;
A feladatban előírt állapotot megvalósító rendszer tehát:

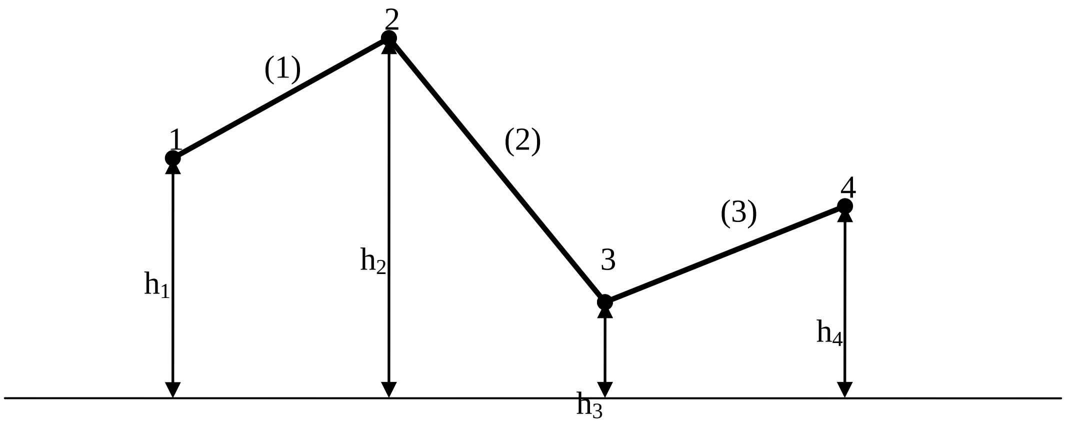


6. ábra

A csövekben az áramerősségeket a $\underline{\underline{K}}^{(1)}\overline{h} = \overline{j}^{(1)}$ és a $\underline{\underline{K}}^{(2)}\overline{h} = \overline{j}^{(2)}$ összefüggések adják, az előző feladatban ismertetett módon.

Házi feladat

1. Adja meg az alábbi csővezeték rendszer diszkrét matematikai modelljét, és számítsa ki az áramerősségeket h_1=20 m, h_2=30 m, h_3=5 m; h_4=15 m esetén!

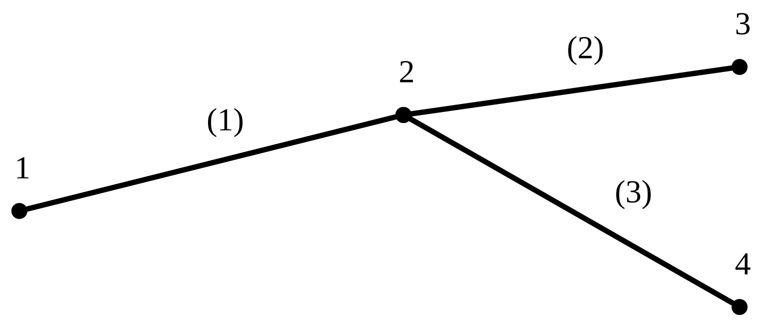


7. ábra

Megoldás:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} m^2/h \qquad \bar{j} = \begin{bmatrix} -10 \\ 35 \\ -35 \\ 10 \end{bmatrix} m^3/h$$

2. Építse fel az ábrán látható csővezeték rendszer diszkrét matematikai modelljét! Miben hasonlít és miben tér el az előző feladatban vizsgált rendszertől? Keresse meg a megoldást, ha adott h_1=50 m; j_2=0 m^3/h; j_3=-10 m^3/h; h_4=20 m!

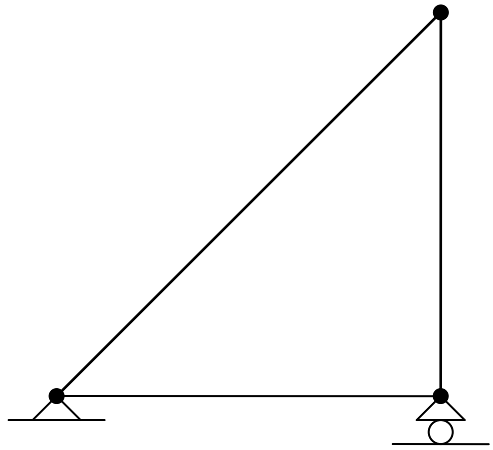


8. ábra

A végeselem módszer lépései

A rácsos tartószerkezetek

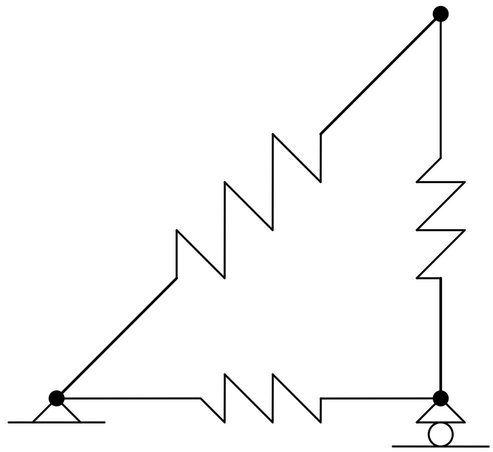
A következőkben egy, a szakirodalomban elterjedten használt példával szeretnénk bemutatni a végeselem módszer lépéseit. A rácsos tartók vizsgálata során látni fognak a végeselem módszerre jellemző elvi megfontolásokat és matematikai eszközöket. A legegyszerűbb rácsos tartó három elemből álló, csuklós csatlakozású szerkezet, ezt fogjuk felhasználni illusztrációként.



9. ábra

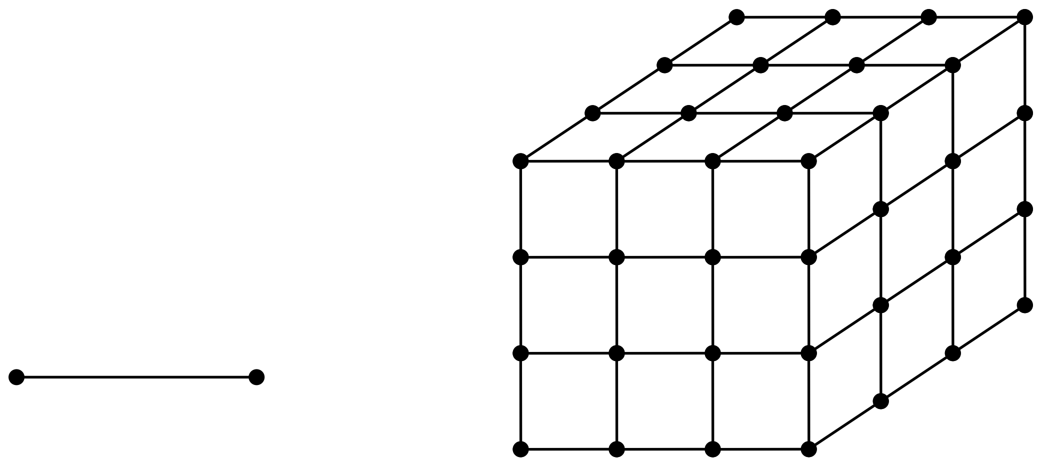
A rácsos tartók szerkezeti elemei a tagok, amelyek általában hosszúkás alakú szilárd testek. A tagok a végpontjaikban a csatlakozásnál kapcsolódnak össze. A csatlakozások technikai megoldására példa a szegecselés, hegesztett kötés, csavar kötés. A rácsos tartók vizsgálata során gyakran idealizáljuk a feladatot. A csatlakozásokat súrlódásmentes csuklókra cseréljük fel, amelyek nem fejtenek ki ellenállást a rudaknak a csatlakozási pont körüli elforduláskor, a tagokat pedig kizárólag axiális irányú (a két végpontján levő csatlakozási pontokat összekötő egyenesbe eső) erőt kifejteni képes rudaknak tekintjük.

A rácsos tartók tagjait a modellben az ún. két csomópontú rúdelemmel helyettesítjük. Ez a legegyszerűbb, szilárdságtani feladatokban használt végeselem. Lineáris rugó elemnek is hívják, mert a megnyúlása és a rá ható erő közötti összefüggés megegyezik a rugalmas erőtörvénnyel. A rácsos tartók közötti összefüggés megegyezik a rugalmas erőtörvénnyel. A rácsos tartók legegyszerűbb modellje a rugókból álló rendszer (súrlódásmentes csuklós csatlakozásokkal).



10. ábra

Természetesen, itt a rugókat ideálisnak kell tekinteni abban az értelemben is, hogy összenyomás esetén sem hajlanak ki oldalra, tehát a lineáris erőtörvény húzásra és összenyomásra egyaránt érvényes.
Ha a 10. ábra alapján összevetjük a lineáris rugóelemet a 64 csomópontú köbös téglatest elemmel, sejthetjük, hogy matematikai leírásuk összetettsége lényegesen eltérő.



a.) b.)

11. ábra: A legegyszerűbb és a legösszetettebb végeselem: a.) két csomópontú rúdelem b.) 64 csomópontú köbös téglatest elem

A legegyszerűbb és legbonyolultabb végeselemekből felépített modellek matematikai leírása azonos elvek alapján, azonos eszközökkel valósítható meg.
A rácsos tartók végeselem modelljének ismertetése bevezető példaként több előnnyel jár:

1. A matematikai leírás analógiája miatt jól előkészíti más, összetettebb elemekből álló modellek megértését és használatát.
2. A legegyszerűbb tartók esetén a számítások kézzel is elvégezhetők, ami megalapozza a későbbi számítógépes alkalmazások elkészítését, vagy azok értő használatát.

Idealizálás és modellalkotás

Amikor a rácsos tartót rudakból súrlódásmentes csuklókkal összeállított szerkezetként képzeljük el, akkor az eredeti tartót idealizáltuk. ezzel a valódi probléma egyfajta közelítését fogalmaztuk meg. Bizonyos, általunk lényegtelennek ítélt tulajdonságaitól eltekintettünk, mint például a csatlakozási pontokban fellépő oldalirányú erőktől, és ezzel együtt a rudakra ható hajlító igénybevételtől. Más tulajdonságokat, mint például az axiális erőket, és azt, hogy a rudak csatlakozó végpontjai mindig együtt mozognak, beépítettük az idealizált tartó jellemzői közé. Figyelmen kívül hagytunk egy sor más adatot is: a rudak színét, hőmérsékletét, elektromos vezetőképességét stb. is.
Valójában ha figyelembe szeretnénk venni minden egyes, a tartószerkezettel kapcsolatos adatot, akkor kezelhetetlenül nagy információtömeggel találnánk szembe magunkat. Ugyanakkor ezek információk jelentős része teljesen felesleges volna, más részük kevés befolyással bír a vizsgált rendszerre, és csak kis hányaduk igazán lényeges a feladat szempontjából. Az idealizáció feladata tehát igen jelentős: el kell választanunk a lényegest a lényegtelentől azzal a céllal, hogy a későbbi számítási munkát a lehető legkisebb mértékűre csökkentsük, de mégse vesszenek el a vizsgált jelenség szempontjából meghatározó

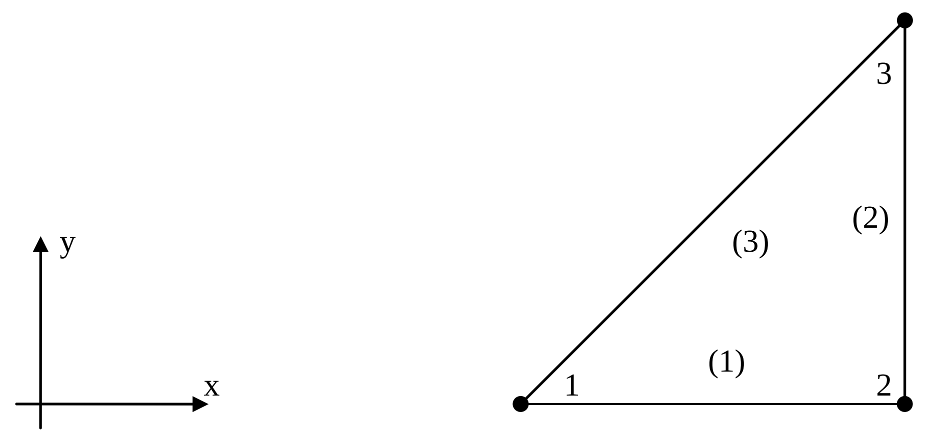
információk. idealizáció nélkül nincs modellalkotás, de talán emberi gondolkodás sem. A valóság végtelen tengeréből meg kell ragadnunk egy használható, de véges, sőt számunkra hatékonyan kezelhetően kis méretű részhalmazt. Érdemes rácsodálkoznunk arra, hogy egyáltalán képesek vagyunk ilyen műveletre! Az idealizáció tehát gondolkodásunk számára hozzáférhetővé teszi a valóság egy részét. Más oldalról pedig korlátozza számításaink érvényességi körét. Bármilyen eredményre is jutunk a későbbiekben, mindig hozzá kell tennünk: „feltéve, hogy az idealizáció során elfogadott állítások igazak.''
A tapasztalat azt mutatja, hogy a rácsos tartók vizsgálata esetén a bemutatott idealizáció jól használható. Ne tévesszük össze az idealizált problémát a modellel. Közös bennük az, hogy mindkettő az emberi elme szüleménye, és az is, hogy céljuk ugyanannak a valóságnak a leírása. Míg azonban az idealizált feladat inkább filozófiai jelegű elképzelés, addig a modell a feladat matematikai leírását jelenti. Ha rendelkezésünkre áll a modell, akkor matematikai műveletek elvégzésével választ adhatunk a kérdések bizonyos halmazára. A modellalkotás során

1. Definiáljuk a rendszer állapotát leíró mennyiségeket.
2. Definiáljuk a környezet hatását leíró mennyiségeket.
3. Megadjuk a rendszer viselkedését leíró törvényszerűségeket.

Ezek a törvényszerűségek általában az 1. és 2. pontban meghatározott mennyiségeket tartalmazó egyenletek, egyenletrendszerek.

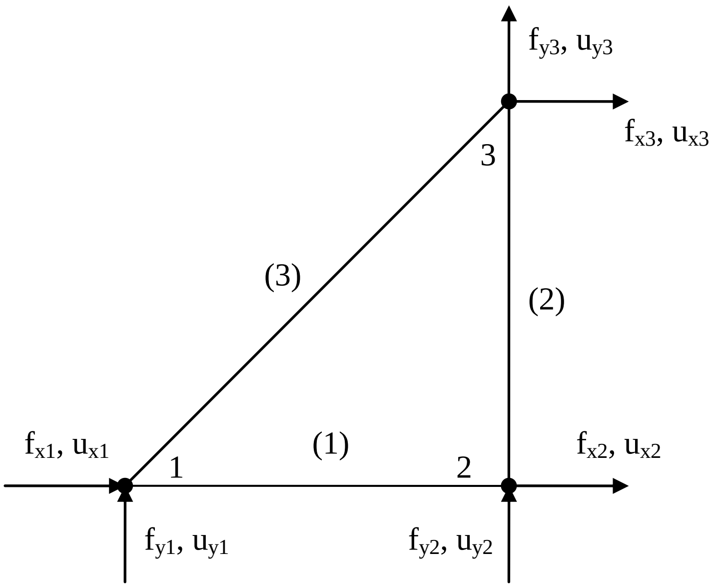
A háromtagú rácsos tartó matematikai modellje

Vizsgálatunk tárgya az idealizált háromtagú rácsos tartó, amely súrlódásmentes csuklókkal összekapcsolt ideálisan rugalmas rudakból áll.

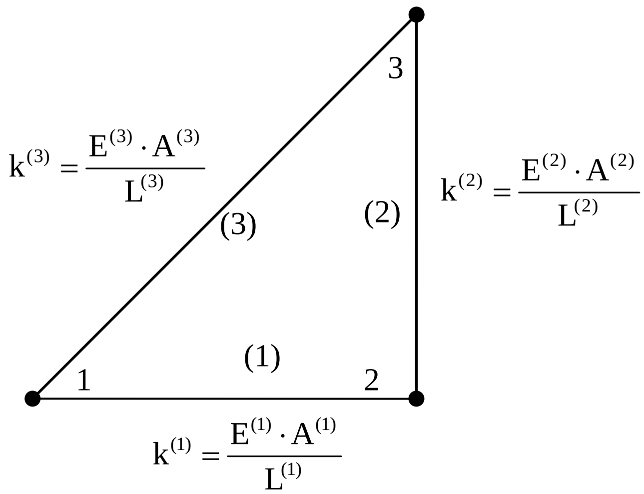


12. ábra

Az ábrán vázolt szerkezet helyzete egyértelműen megadható a rudak csatlakozási pontjainak helyével.
Minden pontot és minden rudat sorszámmal látunk el, amit majd a fizikai mennyiségek indexelésére fogunk használni. A csatlakozási pontok elmozdulás vektorait és az erővektorokat az ábrán szemléltetett síkbeli derékszögű koordináta rendszerben adjuk meg. ezt globális koordináta rendszernek nevezzük. Az elmozdulás vektorok koordinátáit U_{x1}, U_{y1}, stb. betűkkel jelöljük, a csomópontokra ható erők vektorait pedig F_{x1}, F_{y1}, stb. betűkkel.



A rudakat prizmatikusnak tekintve keresztmetszetüket $A^{(i)}$, hosszukat $L^{(i)}$, rugalmassági együtthatójukat pedig $E^{(i)}$ jelöli. A rudakra vonatkozó mennyiségek indexeit a mennyiség betűjelének jobb felső sarkába írjuk, és azért tesszük zárójelbe, hogy megkülönböztessük a hatványkitevőtől.



Mindegyik rúdra érvényes a Hooke-törvény (ezt feltételezzük az idealizációval):

$$F = EA\frac{\Delta L}{L}$$

ahol F a rúdban a ΔL megnyúlás következtében ébredő erő, A, E és L pedig a fentebb mondottak szerint értendő. Vessük ezt össze a rugalmas erőtörvénnyel:

$$F = k \cdot L$$

ahol F a rugóban ébredő erő ΔL megnyúlás esetén, k pedig a rugóállandó. Az ideálisan rugalmas prizmatikus rúd helyettesíthető egy olyan rugóval, amelynek rugóállandója:

$$k = \frac{EA}{L}$$

Ha a rúd nem prizmatikus, de ideálisan rugalmas, akkor is hozzárendelhető a k rugóállandó, de az már nem áll ilyen egyszerű kapcsolatban a rúd geometriai adataival.
Megtettük a modellalkotás első két lépését. A rendszer állapotát jellemzik a csatlakozási pontok (u_{xi}, u_{yi}) koordinátái, a rudakat pedig az $A^{(i)}$, $E^{(i)}$, $L^{(i)}$ és az ezekből kiszámítható $k^{(i)}$ mennyiségek. A környezet hatását a csomópontokban ható (f_{xi}, f_{yi}) erők írják le.
A rendszer állapotát leíró változókat (koordinátákat) egyetlen vektorban is összefoglalhatjuk. Hasonlóan járunk el az erők komponenseivel is.

$$\overline{U} = \begin{bmatrix} U_{x1} \\ U_{y1} \\ U_{x2} \\ U_{y2} \\ U_{x3} \\ U_{y3} \end{bmatrix} \quad \overline{F} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y1} \\ F_{x3} \\ F_{y1} \end{bmatrix}$$

Az $\overline{U}$ vektor (általánosított elmozdulás vektor) komponensei a feladat elsődleges változói. Nevezik ezeket állapotváltozóknak is, vagy fizikai szemlélet alapján szabadsági fokoknak is. Esetünkben a vizsgált rendszer 6 szabadsági fokú.
A matematikai modellalkotás során kapcsolatot kell megadnunk $\overline{U}$ és $\overline{F}$ vektorok között. Mivel az idealizált rácsos tartó viselkedését lineárisnak feltételezzük, ezért az $\overline{U}$ és $\overline{F}$ vektorok közötti kapcsolatnak is lineárisnak kell lennie. A lineáris összefüggéseket mátrixokkal írjuk le:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y1} \\ F_{x3} \\ F_{y1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{x1x1} & K_{x1y1} & K_{x1x2} & K_{x1y2} & K_{x1x3} & K_{x1y3} \\ K_{y1x1} & K_{y1y1} & K_{y1x2} & K_{y1y2} & K_{y1x3} & K_{y1y3} \\ K_{x2x1} & K_{x2y1} & K_{x2x2} & K_{x2y2} & K_{x2x3} & K_{x2y3} \\ K_{y2x1} & K_{y2y1} & K_{y2x2} & K_{y2y2} & K_{y2x3} & K_{y2y3} \\ K_{x3x1} & K_{x3y1} & K_{x3x2} & K_{x3y2} & K_{x3x3} & K_{x3y3} \\ K_{y3x1} & K_{y3y1} & K_{y3x2} & K_{y3y2} & K_{y3x3} & K_{y3y3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{x1} \\ U_{y1} \\ U_{x2} \\ U_{y2} \\ U_{x3} \\ U_{y3} \end{bmatrix}$$

Ezt tömörebben írhatjuk mátrixok segítségével:

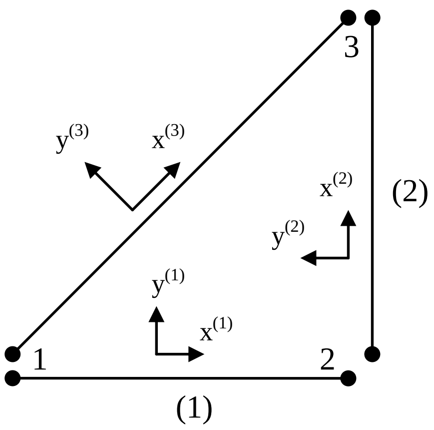
$$\overline{F} = \underline{\underline{K}}\,\overline{U}$$

A $\underline{\underline{K}}$ mátrix neve: globális merevségi mátrix. A globális merevségi mátrix szimmetrikus, elemei a merevségi együtthatók.
Ezzel eljutottunk a matematikai modellalkotás végére. Ismerjük a mennyiségeket, amelyekkel dolgoznunk kell, és felírtuk a közöttük fennálló összefüggést. A $\underline{\underline{K}}$ mátrix kiszámítása további feladatot ad nekünk.

Elemekre bontás és lokalizálás

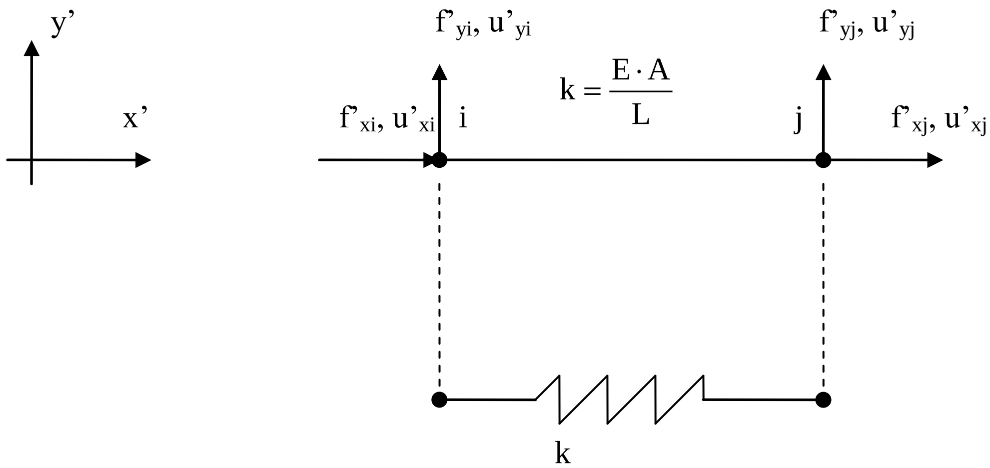
A végeselem módszer egyik alapvető lépése az elemekre bontás. Az egyes elemek leírását az elemhez kötött, lokális koordináta rendszerben adjuk meg. Ezt követően a lokális koordináta rendszerben egy elem matematikai leírását, modelljét készítjük el.
A háromtagú rácsos tartó esetén az elemekre bontás a képzeletbeli csuklók megbontását, és a rudak különválasztását jelenti. Egy rúd egy elem, a végpontjait csomópontoknak nevezzük. A

csomópontokban értelmezzük azokat a fizikai mennyiségeket (esetünkben az elmozdulás vektorokat és az erő vektorokat), amelyekkel jellemezzük az elem állapotát.
Mindegyik elemhez ún. lokális koordináta rendszert kötünk az ábra szerint.



13. ábra: Az elemekre bontott tartó a lokális koordináta rendszerekkel

A lokális koordináta rendszer origója lehet valamely csomópontban vagy az elem felezőpontjában, ezek mindegyike célszerű választás. Az x tengely iránya egybeesik az elem irányával.
Vegyük észre, hogy mindhárom elem, amelyekre szétbontottuk a tartót két csomópontú lineáris rúdelem (rugó elem), csupán a paramétereikben különböznek egymástól. Ezért az indexek elhagyásával általánosan tárgyalhatók. A rúdelem egyik csomópontját jelöljük i, a másikat j betűkkel (i,j=1,2,3 értelemszerűen), az elem indexét pedig most nem írjuk ki.



14. ábra: A két csomópontú lineáris rúdelem, és fizikai interpretációja: a k rugóállandójú, L hosszúságú rugó. A koordináta rendszer tengelyeinek betűjeleiben a vessző arra utal ,hogy lokális koordináta rendszerről van szó.

Most adjuk meg a lokális koordináta rendszerben a helykoordináták és az erő koordináták közötti összefüggést.

$$U'_{yi} = U'_{yj} = 0$$

$$F'_{yi} = F'_{yj} = 0$$

mert a rúdelem megnyúlása és a benne ébredő erő is csak axiális, azaz x' tengely irányú lehet (a lokális rendszerben!).

$$U'_{xj} - U'_{xi} = \Delta L$$

Az elmozdulások különbsége az elem megnyúlása. A hatás-ellenhatás elvéből pedig az x irányú erőkomponensek közötti összefüggés adódik:

$$F'_{xi} = -F'_{xj}$$

A rugalmas erőtörvény összekapcsolja az elmozdulás mező és az erők komponenseit:

$$F'_{xj} = k \cdot \Delta L = k(U'_{xj} - U'_{xi})$$

$$F'_{xi} = -F'_{xj} = -k \cdot \Delta L = -k(U'_{xj} - U'_{xi})$$

Az elem csomópontjaiban érvényes elmozdulás komponenseket és erőkomponenseket egy-egy vektorban foglaljuk össze:

$$\overline{U}' = \begin{bmatrix} U'_{xi} \\ U'_{yi} \\ U'_{xj} \\ U'_{yj} \end{bmatrix} \quad \overline{F}' = \begin{bmatrix} F'_{xi} \\ F'_{yi} \\ F'_{xj} \\ F'_{yj} \end{bmatrix}$$

Az erőtörvényeket egy mátrixegyenletben is összefoglalhatjuk:

$$\begin{bmatrix} F'_{xi} \\ F'_{yi} \\ F'_{xj} \\ F'_{yj} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U'_{xi} \\ U'_{yi} \\ U'_{xj} \\ U'_{yj} \end{bmatrix}$$

A mátrixműveletek elvégzésével győződjünk meg arról, hogy ez az egyenlet egyenértékű a korábbi négy egyenlőséggel! Ugyanezt rövidebben is írhatjuk:

$$\overline{F}' = \underline{\underline{K}}'\,\overline{U}'$$

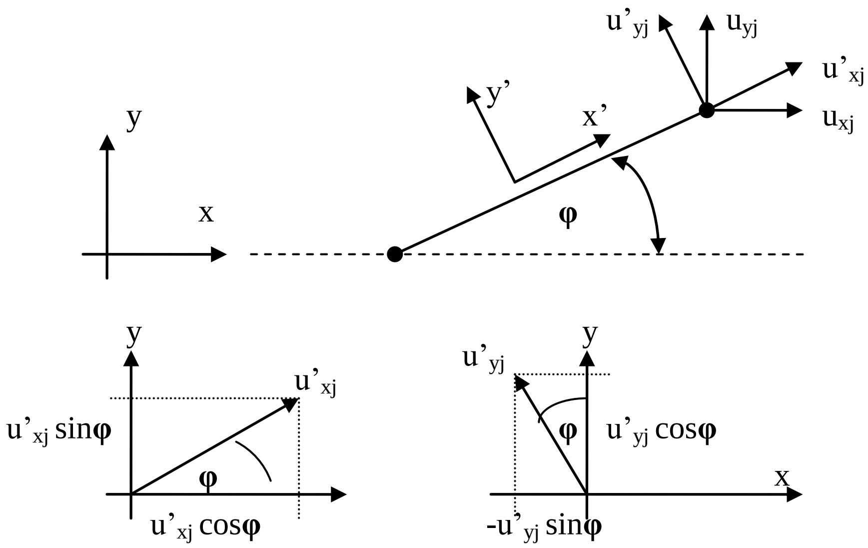
A

$$\underline{\underline{K}}' = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix a két csomópontú lineáris rúdelem merevségi mátrixa. Ennek segítségével adott elmozdulások esetén kiszámíthatjuk a csomópontokban ható erőket (a csomópont által az elemre ható erők).

Áttérés a globális koordináta rendszerre

Az egyes elemek matematikai modellje alapján elkészíthető a teljes feladat globális merevségi mátrixa. Ehhez először az egyes elemek lokális koordináta rendszereiből az adatokat át kell transzformálnunk a globális koordináta rendszerbe. A transzformáció megértéséhez használjuk a következő ábrát.



15. ábra: A lokális és a globális koordináta rendszerek közötti transzformáció, ha az x-tengelyek φ szöget zárnak be.

Az ábra alapján:

$$U_{xi} = U'_{xi}\cos\varphi - U'_{yi}\sin\varphi$$
$$U_{yi} = U'_{xi}\sin\varphi + U'_{yi}\cos\varphi$$
$$U_{xj} = U'_{xj}\cos\varphi - U'_{yj}\sin\varphi$$
$$U_{yj} = U'_{xj}\sin\varphi + U'_{yj}\cos\varphi$$

Ugyanez mátrixok segítségével is leírható:

$$\begin{bmatrix} U_{xi} \\ U_{yi} \\ U_{xj} \\ U_{yj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U'_{xi} \\ U'_{yi} \\ U'_{xj} \\ U'_{yj} \end{bmatrix}$$

tömörebben

$$\overline{U} = \underline{\underline{T}}^{T}\,\overline{U}'$$

A fordított transzformáció:

$$\overline{U}' = \underline{\underline{T}}\,\overline{U}$$

A $\underline{\underline{T}}$ a transzformációs mátrix, a jobb felső indexbe írt T betű a transzponálás jele. Az erő vektorok ugyanúgy transzformálódnak:

$$\overline{F} = \underline{\underline{T}}^{T}\,\overline{F}'$$
$$\overline{F}' = \underline{\underline{T}}\,\overline{F}$$

Vegyük észre, és ellenőrizzük, hogy

$$\underline{\underline{T}}^{T} = \underline{\underline{T}}^{-1},$$

azaz a transzformációs mátrix transzponáltja megegyezik az inverzével. Ebből az következik, hogy

$$\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{T}}^{T} = \underline{\underline{E}}$$

ahol $\underline{\underline{E}}$ az egységmátrix. Ez az összefüggés ad lehetőséget az ellenőrzésre.

Ahhoz, hogy az elem merevségi mátrixának transzformációs szabályát megállapítsuk, tekintsük át az eddig megismert összefüggéseket:

$$\overline{F}' = K'\overline{U}'$$

$$\overline{U}' = \underline{\underline{T}}\,\overline{U}$$

$$\overline{F}' = T\overline{F}$$

Behelyettesítéssel kapjuk, hogy:

$$\underline{\underline{T}}\,\overline{F} = \underline{\underline{K}}'\underline{\underline{T}}\,\overline{U} \quad /\underline{\underline{T}}^{T}\cdot$$

$$\overline{F} = \underline{\underline{T}}^{T}\underline{\underline{K}}'\underline{\underline{T}}\,\overline{U}.$$

Hasonlítsuk ezt össze a globális koordináta rendszerben felírt

$$\overline{F} = \underline{\underline{K}}\,\overline{U}$$

egyenlőséggel:

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{T}}^{T}\underline{\underline{K}}'\underline{\underline{T}}$$

Most vezessük be újra az elemekre vonatkozó indexek használatát, és írjuk fel a transzformációkat:

$$\underline{\underline{K}}^{(1)} = \underline{\underline{T}}^{(1)}\underline{\underline{K}}^{(1)'}\underline{\underline{T}}^{(1)T}$$

$$\underline{\underline{K}}^{(2)} = \underline{\underline{T}}^{(2)}\underline{\underline{K}}^{(2)'}\underline{\underline{T}}^{(2)T}$$

$$\underline{\underline{K}}^{(3)} = \underline{\underline{T}}^{(3)}\underline{\underline{K}}^{(3)'}\underline{\underline{T}}^{(3)T}$$

A $\underline{\underline{K}}^{(1)}, \underline{\underline{K}}^{(2)}$ és $\underline{\underline{K}}^{(3)}$ mátrixok az elemek merevségi mátrixai globális koordináta rendszerben. A $\underline{\underline{T}}^{(1)}, \underline{\underline{T}}^{(2)}$ és $\underline{\underline{T}}^{(3)}$ a transzformációs mátrixok, amelyek esetünkben csak az adott elemnek a globális x tengellyel bezárt φ_1, φ_2, φ_3 szögétől függenek. A $\underline{\underline{K}}^{(1)'}, \underline{\underline{K}}^{(2)'}$ és $\underline{\underline{K}}^{(3)'}$ mátrixok külön figyelmet érdemelnek. Ezek az (1), (2) és (3) elemek lokális koordináta rendszerében felírt merevségi mátrixok. Mindhárom

$$\underline{\underline{K}}^{(1)'} = k^{(i)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

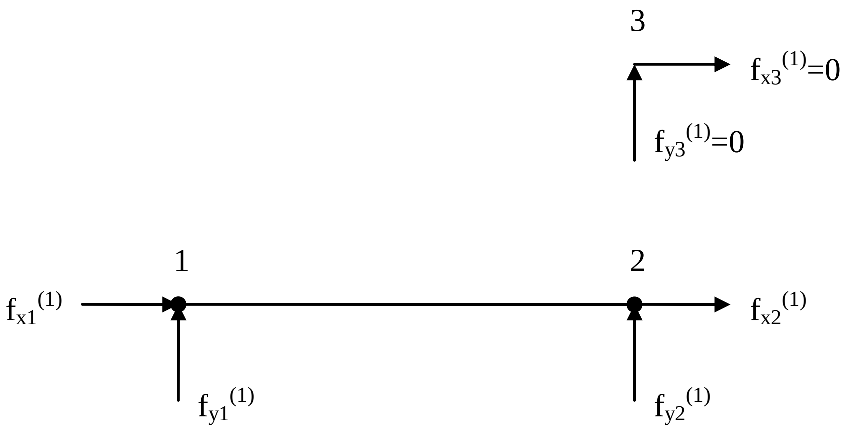
alakú, azaz csak a $k^{(i)}$ szorzószámban térnek el egymástól. Azért fontos ezt meglátnunk, mert ebből értjük meg az elemekre bontás, és az általános elem matematikai modelljének hasznát. Ha az általános elem leírása a birtokunkban van, akkor azt megfelelő konstansok alkalmazásával (amelyek anyagra és méretre jellemzők általában) bármely ugyanolyan típusú elem esetén felhasználhatjuk. Azt mondhatjuk, hogy a globális koordinátarendszerben felírt $\underline{\underline{K}}^{(i)}$ merevségi mátrixok lényegében ugyanannak az általános, lokális koordináta rendszerben felírt mátrixának a képei. Úgy jönnek létre, hogy az általános elem lokális merevségi mátrixát megszorozzuk egy számmal, majd koordináta transzformációt hajtunk végre rajta.

Összeállítás/összefűzés

Miután meghatároztuk az egyes elemek merevségi mátrixait a globális koordináta rendszerben, lehetőségünk nyílik a teljes rendszer merevségi mátrixának előállítására. Ezt jelképesen „összeszerelésnek” is hívják, mert fizikai interpretációja a rácsszerkezet elemekből való összeszerelése. Matematikai értelemben is az ismert részekből építjük fel az egészet, ezt a folyamatot „ összefűzésnek” is nevezik.
A feladat az, hogy megmondjuk, hogyan járulnak hozzá az egyes elemek merevségi mátrixai a globális merevségi mátrixhoz. Két szabályt kell figyelembe vennünk:

1. Az elmozdulások kompatibilitása (illeszkedése): az egy csatlakozási ponthoz tartozó csomópontok elmozdulása azonos. (Az összekötött rúdvégződések együtt mozognak.)
2. Az erők egyensúlya: egy csatlakozási pontban a rudak (elemek) által a pontra kifejtett erő eredője éppen kiegyenlíti a külső erőhatást. (Ha ez minden pontban teljesül, akkor a rácsos tartó egyensúlyban van.)

Az első fontos lépés a mátrixok kiegészítése. Az erő vektorokat és a merevségi mátrixokat nulla sorokkal és oszlopokkal egészítjük ki, hogy összeadhatóak legyenek. Ezt egy példán mutatjuk be. Az $\bar{f}^{(1)}$ vektor megadja a csomópontokban az (1) elemre ható erőket.



16. ábra: az (1) elemre ható erők

A vektor komponensei:

$$\bar{f}^{(1)} = \begin{bmatrix} f_{x1}^{(1)} \\ f_{y1}^{(1)} \\ f_{x2}^{(1)} \\ f_{y2}^{(1)} \end{bmatrix}$$

Ez egy négykomponensű vektor, amely az 1. és 2. csomópontokra vonatkozóan tartalmaz adatokat. Pl. $\bar{f}_{x1}^{(1)}$ az 1. csomópont által az (1) elemre kifejtett erő x komponensét jelenti.
Egészítsük ki ezt a vektort $\bar{f}_{x3}^{(1)}$ és $\bar{f}_{y3}^{(1)}$ komponensekkel:

$$\bar{f}^{(1)} = \begin{bmatrix} f_{x1}^{(1)} \\ f_{y1}^{(1)} \\ f_{x2}^{(1)} \\ f_{y2}^{(1)} \\ f_{x3}^{(1)} \\ f_{y3}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{x1}^{(1)} \\ f_{y1}^{(1)} \\ f_{x2}^{(1)} \\ f_{y2}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az utolsó két komponens mindig nulla, hiszen a 3. csatlakozási pont nem érintkezik az (1) elemmel, tehát erőt sem fejthet ki rá.

Hasonlóan a $\underline{\underline{K}}^{(1)}$ merevségi mátrixot is kiegészítjük két sorral és két oszloppal, amelyek nullákkal vannak feltöltve.

$$\underline{\underline{K}}^{(1)} = \begin{bmatrix} K_{x1x1}^{(1)} & K_{x1y1}^{(1)} & K_{x1x2}^{(1)} & K_{x1y2}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{y1x1}^{(1)} & K_{y1y1}^{(1)} & K_{y1x2}^{(1)} & K_{y1y2}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{x2x1}^{(1)} & K_{x2y1}^{(1)} & K_{x2x2}^{(1)} & K_{x2y2}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{y2x1}^{(1)} & K_{y2y1}^{(1)} & K_{y2x2}^{(1)} & K_{y2y2}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az elmozdulás vektorokkal még egyszerűbb dolgunk van. Az elmozdulások kompatibilitása miatt írhatjuk, hogy

$\bar{u}_{x1}^{(1)} = \bar{u}_{x1}^{(3)}$; $\bar{u}_{y1}^{(1)} = \bar{u}_{y1}^{(3)}$; $\bar{u}_{x2}^{(1)} = \bar{u}_{x2}^{(2)}$; $\bar{u}_{y2}^{(1)} = \bar{u}_{y2}^{(2)}$; $\bar{u}_{x3}^{(2)} = \bar{u}_{x3}^{(3)}$; $\bar{u}_{y3}^{(2)} = \bar{u}_{y3}^{(3)}$

Ezek az egyenlőségek azt jelentik, hogy az elmozdulás komponensekről az elem indexek elhagyhatók és az elmozdulásvektor

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix}$$

Alakban használható. Lássunk egy példát a kiegészített mátrixok használatára. Az $\bar{f}^{(1)} = \underline{\underline{K}}^{(1)} \cdot \bar{u}^{(1)}$ összefüggés az alábbi alakot ölti:

$$\bar{f}^{(1)} = \begin{bmatrix} f_{x1}^{(1)} \\ f_{y1}^{(1)} \\ f_{x2}^{(1)} \\ f_{y2}^{(1)} \\ f_{x3}^{(1)} \\ f_{y3}^{(1)} \end{bmatrix} = \underline{\underline{K}}^{(1)}\bar{u} = \begin{bmatrix} K_{x1x1}^{(1)} & K_{x1y1}^{(1)} & K_{x1x2}^{(1)} & K_{x1y2}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{y1x1}^{(1)} & K_{y1y1}^{(1)} & K_{y1x2}^{(1)} & K_{y1y2}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{x2x1}^{(1)} & K_{x2y1}^{(1)} & K_{x2x2}^{(1)} & K_{x2y2}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{y2x1}^{(1)} & K_{y2y1}^{(1)} & K_{y2x2}^{(1)} & K_{y2y2}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} = \underline{\underline{K}}^{(1)} \cdot \bar{u}$$

Látszik, hogy $\bar{f}_{x3}^{(1)} = \bar{f}_{y3}^{(1)} = 0$ mindig teljesül, és az is, hogy csak az elmozdulások lineáris függvényei. Az eredmény tehát ugyanaz, mint kiegészítés előtt. A kiegészítésre azért van szükség, hogy a különböző elemekhez tartozó vektorok és mátrixok összeadhatók legyenek.

Az egyes csomópontokra ható külső erők komponenseit az eddigi gyakorlatnak megfelelően egy vektorban foglalhatjuk össze:

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix}$$

Az erők egyensúlya azt jelenti, hogy minden egyes csomópontban ható erők kiegyenlítik egymást, sőt azok x és y komponenseire külön-külön is igaz.

17. ábra: az 1. csomópont által az elemekre kifejtett erők (a),
és az erők egyensúlya az 1. csomópontban (b).

Az 1. csomópontban az erők egyensúlya így írható:

$$f_{x1} - f_{x1}^{(1)} - f_{x1}^{(2)} - f_{x1}^{(3)} = 0$$

$$f_{y1} - f_{y1}^{(1)} - f_{y1}^{(2)} - f_{y1}^{(3)} = 0$$

He az 1. csomópont az (1) elemre $\bar{f}_{x1}^{(1)}$ erővel hat (x komponens), akkor a hatás-ellenhatás elve szerint az (1) elem az 1. csomópontra $-\bar{f}_{x1}^{(1)}$ erőt fog kifejteni x irányban. A fenti egyenlőségek az 1. csomópontra ható erőket tartalmazzák, és az egyensúly feltételét fogalmazzák meg. Természetesen az $\bar{f}_{x1}^{(3)}$ és a $\bar{f}_{y1}^{(3)}$ nullák. Minden csomópontra felírva a hasonló egyenleteket hat egyenlethez jutunk, amelyeket vektori alakban így írhatunk:

$$\bar{f} - \bar{f}^{(1)} - \bar{f}^{(2)} - \bar{f}^{(3)} = 0$$

Vagy

$$f = f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(3)}$$

(Ezek azok az összefüggések, amelyek miatt korábban ki kellett egészítenünk a vektrorokat, és a soron következők:) Helyettesítsük be az $\bar{f}^{(i)} = \underline{\underline{K}}^{(i)} \cdot \bar{u}$ összefüggéseket:

$$\bar{f} = \underline{\underline{K}}^{(1)} \cdot \bar{u} + \underline{\underline{K}}^{(2)} \cdot \bar{u} + \underline{\underline{K}}^{(3)} \cdot \bar{u}$$

$$\bar{f} = (\underline{\underline{K}}^{(1)} + \underline{\underline{K}}^{(2)} + \underline{\underline{K}}^{(3)}) \cdot \bar{u}$$

$$\bar{f} = \underline{\underline{K}} \cdot \bar{u}\text{, ahol}$$

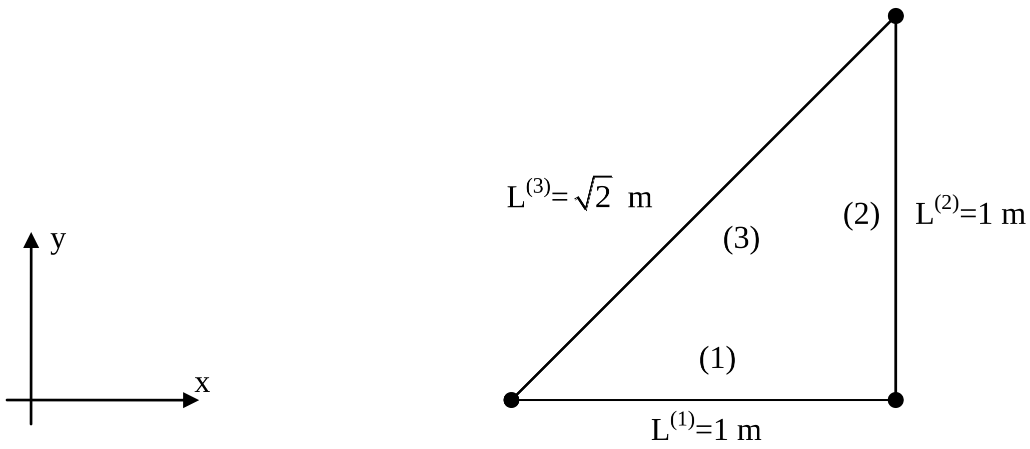
$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}^{(1)} + \underline{\underline{K}}^{(2)} + \underline{\underline{K}}^{(3)}.$$

A rendszer $\underline{\underline{K}}$ merevségi mátrixát az egyes elemek globális koordinátarendszerben felírt, megfelelő nullákkal feltöltött sorokkal és oszlopokkal kiegészített merevségi mátrixainak összegeként kaphatjuk meg. Ez az összefűzés.

Példa a globális merevségi mátrix kiszámítására

Az előző négy alfejezetben áttekintettük azokat a lépéseket, amelyek elvezetnek a globális merevségi mátrix kiszámításáig. Mielőtt tovább haladnánk, lássunk egy számszerű példát, amely illusztrálja az eddigieket. Háromtagú rácsos tartószerkezet idealizált modelljét vizsgáljuk. Minden egyes tag kör keresztmetszetű cső, amelynek falvastagsága 0,2 mm, belső sugarai $r^{(1)}$=3,7 mm, $r^{(2)}$=1,8 mm, $r^{(3)}$=10,6 mm, anyaguk acél, így

$E^{(1)}=E^{(2)}=E^{(3)}=2{,}1\cdot10^{11}\ \text{N/m}^2=2{,}1\cdot10^{5}\text{MPa}$.



18. ábra: A tartó méretei és a globális koordináta rendszer

A rendelkezésünkre álló adatokból kiszámítjuk a lineáris rúdelemek rugóállandóit:

$$k^{(1)} = \frac{E^{(1)} \cdot A^{(1)}}{L^{(1)}} = 1000\frac{N}{m}; k^{(2)} = 500\frac{N}{m}; k^{(3)} = 200\frac{N}{m}$$

(A keresztmetszetek természetesen az $A=R^2\pi-r^2\pi$ formulából kaphatók, ahol R a külső, r a belső sugár.) Az adatokat szándékosan úgy választottuk, hogy a rugóállandók kerek számok legyenek, és így a számítások menete könnyebben követhető legyen. Az egyes elemek merevségi mátrixai a lokális koordináta rendszerben

$$\underline{\underline{K}}^{(1)'} = 1000 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{N}{m}$$

$$\underline{\underline{K}}^{(2)'} = 500 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

$$\underline{\underline{K}}^{(3)'} = 200 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

Láthatjuk, amit már korábban is megállapítottunk, hogy a lokális rendszerben felírt merevségi mátrixok (kétcsomópontú lineáris rúdelem esetén) csupán egy szorzótényezőben térnek el egymástól. Munkánk következő fázisában áttérünk a lokális koordinátákról globális koordinátákra. Ehhez meg kell szerkesztenünk a $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, $T^{(3)}$ transzformációs mátrixokat. A feladatul kitűzött rácsos tartó esetén az egyes végeselemeknek a globális x-tengellyel bezárt szögei rendre $\varphi^{(1)}=0°$; $\varphi^{(2)}=90°$; $\varphi^{(3)}=45°$. Ebből

$$\underline{\underline{T}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{T}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{T}}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Vegyük észre, $T^{(1)}$ egységmátrix, ami összhangban áll azzal, hogy az (1) elem lokális koordinátarendszerének tengelyei párhuzamosak a globális koordinátarendszer tengelyeivel. Most végezzük el a transzformációt:

$$\underline{\underline{K}}^{(1)} = \underline{\underline{T}}^{(1)T} \cdot \underline{\underline{K}}^{(1)'} \cdot \underline{\underline{T}}^{(1)} = 1000 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

$$\underline{\underline{K}}^{(2)} = \underline{\underline{T}}^{(2)T} \cdot \underline{\underline{K}}^{(2)'} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)} = 500 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

$$\underline{\underline{K}}^{(3)'} = \underline{\underline{T}}^{(3)T} \cdot \underline{\underline{K}}^{(3)'} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)} = 200 \cdot \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

Ahhoz, hogy összeadjuk a mátrixokat, ki kell egészítenünk azokat nulla sorokkal és oszlopokkal, amelyek a hiányzó indexeknek megfelelő helyre kerülnek:

$$\underline{\underline{K}}^{(1)} = 1000 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

$$\underline{\underline{K}}^{(2)} = 500 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

$$\underline{\underline{K}}^{(3)} = 200 \cdot \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & -0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & -0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

Most elvégezhetjük az összeadást:

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}^{(1)} + \underline{\underline{K}}^{(2)} + \underline{\underline{K}}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1100 & 100 & -1000 & 0 & -100 & -100 \\ 100 & 100 & 0 & 0 & -100 & -100 \\ -1000 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 500 & 0 & -500 \\ -100 & -100 & 0 & 0 & 100 & 100 \\ -100 & -100 & 0 & -500 & 100 & 600 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

A $\underline{\underline{K}}$ globális merevségi mátrix szimmetrikus. A könnyebb átláthatóság kedvéért kiemelünk 100-at, és így írjuk:

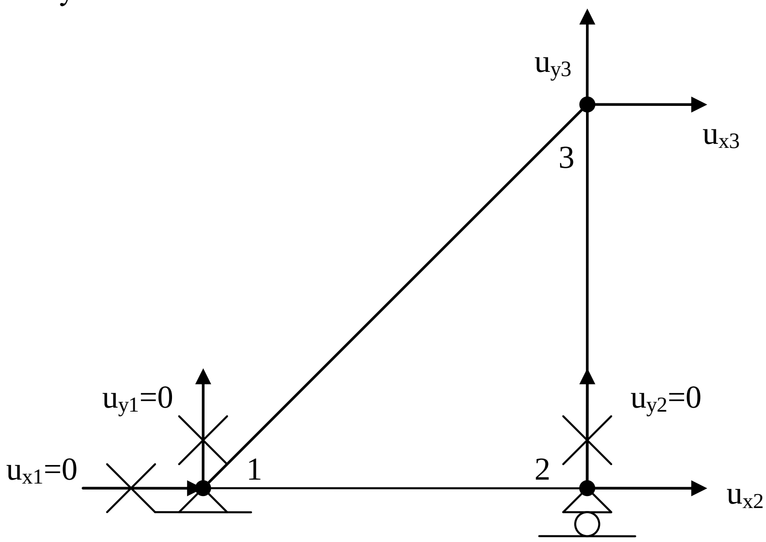
$$\underline{\underline{K}} = 100 \cdot \begin{bmatrix} 11 & 1 & -10 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Peremfeltételek

A globális merevségi mátrix kiszámításához konkrét alakot öltött a

$$\underline{\underline{K}} \cdot \bar{u} = \bar{f}$$

egyenlet. A feladat azonban nem csupán a tartó elemeit adja meg, hanem a befogásokat is, amelyeket kinematikai peremfeltételeknek nevezünk, mert az ismeretlen $\bar{u}$ elmozdulásvektorra vonatkozó előírásokat jelentenek. A befalazás és a görgős alátámasztás azt jelenti, hogy az 1. csomópont nem mozdulhat el, a 2. csomópont pedig csak x irányba mozoghat, y irányba nem. Ezt szemlélteti az alábbi ábra:



A kinematikai peremfeltételek figyelembevételével az $\bar{u}$ globális elmozdulás vektort az alábbi alakban keressük:

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{x2} \\ 0 \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix}$$

A befogáson kívül a feladat megadja a 3. csomópontban ható külső erőket is:

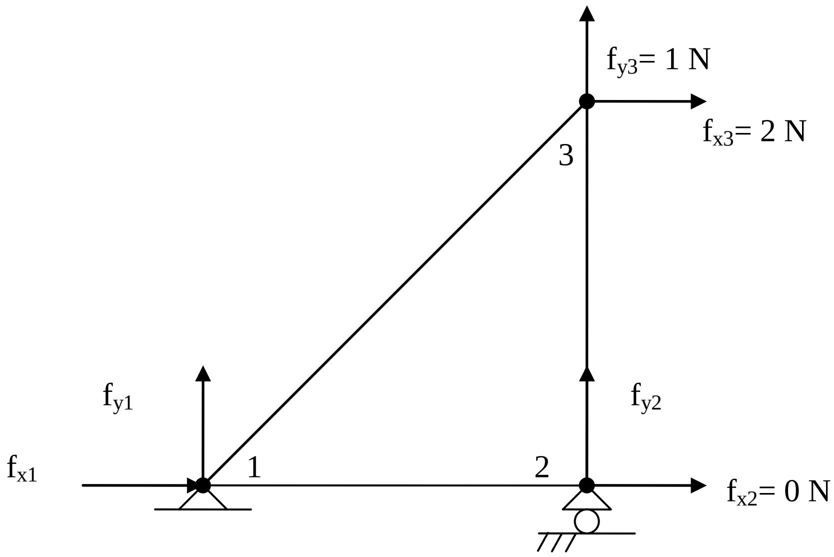
$$f_{x3} = 2\ \text{N}$$

$$f_{y3} = 1\ \text{N}$$

valamint tudjuk, hogy a görgős alátámasztás x irányú erőt nem képes kifejteni, azaz

$$f_{x2} = 0\ \text{N}\,.$$

Ezt is szemléltethetjük az ábrán:



A külső erők vektora az alábbi alakú:

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ 0 \\ f_{y2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mivel a $\underline{\underline{K}}$ globális merevségi mátrix szinguláris, a $\underline{\underline{K}} \cdot \bar{u} = \bar{f}$ egyenlet nem oldható meg peremfeltételek megadása nélkül! (Ez azt jelenti, hogy a sorai nem lineárisan függetlenek, vagyis a rangja kisebb, mint a sorainak a száma.) Az ilyen típusú feladatok kézzel való megoldására általánosan ismert a következő eljárás. Töröljük a globális merevségi mátrixból azokat a sorokat és oszlopokat, amelyek a kinematikai peremfeltételben adott elmozdulás komponenseknek felelnek meg. Így már a $\underline{\underline{K}}$ nem lesz szinguláris, és az egyenlet megoldható. Ezt látjuk a következő alfejezetben.

A feladat megoldása

A peremfeltételek figyelembevételével a feladatot leíró egyenlet így írható:

$$100 \cdot \begin{bmatrix} 11 & 1 & -10 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{x2} \\ 0 \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ 0 \\ f_{y2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mind a mátrixból, mind a vektorokból elhagyjuk x_1, y_1 és y_2 sorokat és oszlopokat.

$$100\cdot\begin{bmatrix} 11 & 1 & -10 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -5 & 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{x2} \\ 0 \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ 0 \\ f_{y2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$100\cdot\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{x2} \\ u_{x3} \\ u_{x3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ez a redukált egyenlet, amit megoldhatunk több módszerrel (pl. Gauss-eliminációval), de itt a legelemibb megoldást közöljük, amely kisszámú ismeretlen esetén használható csak. A mátrix szorzás szabályai szerint elvégezve a kijelölt műveleteket, és a vektorokat komponensenként felírva a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$100\times 10\ u_{x2} = 0$$

$$100\cdot(u_{x3}+u_{x3}) = 2$$

$$100\cdot(u_{y3}+6u_{y3}) = 1$$

Ebből a megoldás:

$$u_{x2} = 0\ \text{m}$$

$$u_{x3} = 0{,}022\ \text{m}$$

$$u_{y3} = -0{,}002\ \text{m}$$

Ez az eredmény könnyen értelmezhető: megkaptuk azokat az elmozdulásokat, amelyeket a befogás nem tilt meg. Itt jegyezzük meg, hogy a kapott elmozdulás értékek szokatlanul nagyok. Ennek oka az, hogy a tartószerkezet igen vékony falú csövekből áll (0,2 mm az alufólia vastagsága), de mivel a valóságban az sem ideálisan rugalmas, ilyen nagy megnyúlások esetén elszakad. Azonban az adatok megválasztásakor most a kis számok használata és a számítások követhetősége volt az elsődleges cél.
A csomópontok elmozdulásai tehát:

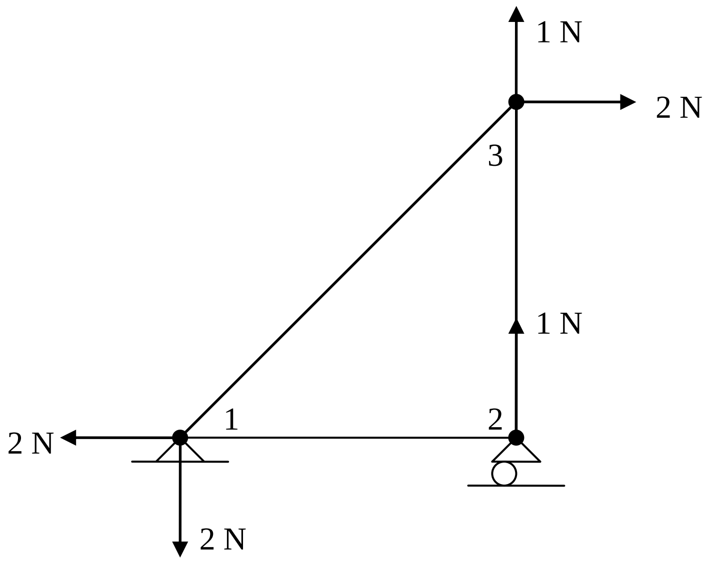
$$\bar{u}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}022 \\ -0{,}002 \end{bmatrix}\text{m}$$

A külső és belső erők kiszámítása

Ha az $\bar{u}$ elmozdulás vektor ismert, akkor a merevségi mátrix segítségével minden erőt ki tudunk számolni:

$$\bar{f} = \underline{\underline{K}} \cdot \bar{u} = 100 \cdot \begin{bmatrix} 11 & 1 & -10 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,022 \\ -0,002 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ezzel megkaptuk a befogásokban ébredő, ún. reakcióerőket. Vegyük észre, hogy az előírt erőkomponensek automatikusan adódtak.



19. ábra: A rácsos tartóra ható előre megadott terhelés (f_{x3}; f_{y3}) és a kiszámított reakcióerők

Az egyes rudak igénybevétele szintén fontos kérdés egy tartószerkezet vizsgálatakor (méretezéskor), ezért kiszámítjuk az egyes elemekre ható erőket. Ehhez az elemek merevségi mátrixát használjuk fel (globális koordináta rendszerben): …