Bevezetés

Ez a segédlet a Nyíregyházi Főiskola Műszaki és Mezőgazdasági Karán, gépészmérnök szakos hallgatóknak oktatott, "VEM alapjai" című tantárgy anyagának egy részét tartalmazza. Nem fedi le a tantárgy teljes anyagát.

Az alábbi szakirodalmi forrásokból merítettem leginkább:

- O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, J. Z. Zhu: The finite element method, its basis and fundamentals, Elsevier Butterwort-Heineman Linacre House, Oxford, 2005, ISBN 0-7506-6320-0
- > Páczelt I.: A végeselem-módszer alapjai. Miskolci Egyetem, 1993.
- Carlos A. Felippa: Introduction to Finite Element Methods, University of Colorado, textbook assembled from lecture notes, 2004.

Dr. Dezső Gergely, főiskolai tanár, tantárgyfelelős

A végeselem módszer helye a tudományban

Annak ellenére, hogy a végeselem módszer a természettudomány szinte minden területén alkalmazható, a jelen fejezet csupán a mechanikán belül kívánja megmutatni a helyét. Ennek oka kettős. A módszer első gyakorlati alkalmazásai, amelyek a fejlődésére is döntő hatást gyakoroltak, mechanikai jellegűek voltak. Másrészt, ha megértjük a mechanikán belüli szerepét, könnyen általánosíthatjuk azt a többi tudományterületre.

A fizika általában, és vele együtt a mechanika az alábbi területekre osztható:

- Kísérleti fizika/mechanika: a jelenségek megfigyelésekkel és kísérletekkel való vizsgálatát jelenti, célja az ismeretszerzés.
- Elméleti fizika/mechanika: célja a meglévő ismeretek átfogó rendszerbe foglalása, elsősorban matematikai eszközökkel, deduktív úton.
- Alkalmazott fizika/mechanika: a rendelkezésre álló tudományos ismeretek technikai, ipari alkalmazását, közvetlen hasznosítását jelenti.
- Számítógépes fizika/mechanika: a XX. Század szülötte, a számítástudomány fejlődésének köszönheti létrejöttét. Célja a jelenségek, vagy tudományos hipotézisek számítógépes modellezése, módszere a matematikai modellek számítógépes implementálása. Bármilyen jelenségre vonatkozóan végezhetünk számításokat, ha rendelkezésünkre áll annak vélt vagy valós matematikai modellje, azt beprogramozzuk, és van egy számítógépünk, amely képes belátható időn belül elvégezni a szükséges műveleteket (ez néha nem is annyira magától értetődő). A számítógépes fizikát azért szokás külön területként emlegetni, mert sajátosan kapcsolódnak össze benne a fizika, számítástudomány és a matematika ismeretanyagai. A számítógépes fizikát leggyakrabban elméleti vagy alkalmazott fizikai vizsgálatokra használják.

A végeselem módszer egy matematikai eljárás, amely könnyen programozható, és ezért a számítógépes fizika ill. mechanika egyik legelterjedtebb eszköze.

A feladatok osztályozása

A számítógépes mechanika témakörei a vizsgált rendszer méreteinek nagyságrendje alapján tovább **csoportosítható** nano- és mikromechanika, kontinuummechanika (szilárd testek, folyadékok, többfázisú rendszerek), és rendszerek mechanikájára.

A kontinuummechanikában megkülönböztetjük a dinamikai és a sztatikai feladatokat. A dinamikai problémák esetén időfüggő jelenségeket vizsgálunk úgy, hogy figyelembe vesszük a tehetetlenségi erőket is. A sztatikai problémák további két nagy csoportra oszthatók. Az első esetben időfüggetlen jelenségeket vizsgálunk. A második csoportba az ún. kvázi-sztatikus feladatok tartoznak, amelyek időfüggők ugyan, de az esetlegesen fellépő tehetetlenségi erőket mégsem vesszük figyelembe. Ennek több oka lehet: sok esetben ez egy dinamikai jelenség közelítő vizsgálata.

A fizikai modellezéssel kapcsolatosan meg kell említenünk még a **linearitás** fogalmát. Egy feladat lineáris, ha a "kiváltó ok" \rightarrow "válasz" folyamatban a válasz lineáris, ami azt jelenti, hogy kétszer akkora "kiváltó ok" kétszer akkora "választ" eredményez. Például a Hooketörvény prizmatikus rúd húzása esetén az alábbi egyszerű alakban várható: $\sigma = E \cdot \varepsilon$, ahol σ a rúd tetszőleges keresztmetszetében ébredő feszültség, ε a relatív megnyúlás, E pedig a rugalmassági együttható. Világos, hogy kétszer nagyobb feszültség esetén kétszer nagyobb lesz a rúd megnyúlása. A Hooke-törvény lineáris anyagtörvény. A rugalmas rúd húzása lineáris feladat. A Hooke-törvény tenzorokkal megfogalmazott $\underline{\sigma} = C \cdot \underline{\varepsilon}$ alakja is lineáris. Ha

egy feladat nem lineáris, akkor nemlineárisnak nevezzük. Például, ha a rúd húzásának modellezésekor nem a Hooke-törvényt, hanem a szakítódiagramot vesszük figyelembe, akkor a feladat nemlineárissá válik.



1. ábra A Hooke-törvény (A) és a szakítási diagram (B)

A végeselem módszerrel vizsgálhatunk dinamikai, sztatikai, lineáris és nemlineáris feladatokat egyaránt. Legszemléletesebben a lineáris sztatikai feladatok tárgyalhatók.

A végeselem módszer gondolatmenete

A környezetünkben megfigyelhető jelenségek általában oly összetettek, hogy teljes egészükben nem vagyunk képesek tanulmányozni azokat. Az emberi elme különleges képessége az, hogy részekre tudja osztani az őt körülvevő világot, a részeket külön tudja

vizsgálni, majd a részek tulajdonságaiból következtetni tud egy összetett rendszer lehetséges viselkedésére. Például

a.) a mérnök az acélrudak jellemzői alapján megtervezhet egy bonyolult rácsos tartószerkezetet

b.) ha a gazda ismeri a növények szükségletei, akkor optimálisan tudja működtetni egész gazdaságát

c.) amióta I. Newton felismerte a gravitációs erőtörvényt, azóta lehetséges nagyszámú égitestből álló rendszerek mozgásformájának tanulmányozása és leírása viszonylag nagy pontossággal

Nemcsak a VEM, hanem a legtöbb tudományos vizsgálat kulcslépése az, hogy megkeresse azokat a legegyszerűbb építőelemeket, amelyek még hordozzák az egész rendszer minden lényeges tulajdonságát (például a kémia esetében igen látványos ez a gondolkodásmód: az atomok és molekulák tulajdonságaira vissza lehet vezetni az anyagi halmazok legtöbb kémiai sajátságát). Ezeknek az elemeknek a vizsgálata, viselkedésük (matematikai) leírása egyszerűbb feladat, mint az egész rendszert vizsgálni. Itt azonban nem ér véget a munka. A részek egymáshoz való kölcsönhatásának ismeretében azt is meg kell mondani, miként működik a belőlük összeállított egész rendszer.

A végeselem módszer esetén mind a **részekre bontás, mind az összeállítás** több lépésben történhet, az eredeti rendszer bonyolultságától függően.

A részekre bontásnak két jellegzetes megvalósítását ismerjük. Egy sok alkatrészből álló műszaki rendszert alrendszerekre, majd alkatrészekre bontunk, pl.:



Ez megfelel egy képzeletbeli szétszerelésnek, mely (miként az ábra is sugallja,) több szinten valósul meg. Egy-egy alkatrész azonban önmagában még mindig túl bonyolult rendszer a közvetlen (pl. kontinuummechanikai) számításokhoz (pl. egy ferde fogazású fogaskerék). Ezért ezt tovább bontjuk. Az alkatrész egy folytonos közegből felépülő test, amit gondolatban helyettesítünk véges számú összetevővel, ez a diszkretizáció. A diszkrét rendszer az eredeti kontinuumnak egy helyettesítése, amely a mátrixalgebra eszközeivel leírható. A végeselemek a diszkrét rendszer "építőkövei".

A VEM második fontos lépése a végeselemekből az egész rendszer (pl. fogaskerék) modelljének összeállítása. Ez matematikai értelemben az elemek kis mátrixaiból egy nagy mátrixegyenlet felépítését jelenti. Így létrejön a fizikai rendszer ún. diszkrét modellje. A diszkrét modell megoldása az ún. diszkrét megoldás, amely az eredeti rendszer viselkedésének egyfajta közelítése.

A diszkrét megoldás két fő hibával terhelt, amelyek mértékét az eredmények felhasználása előtt ellenőrizni kell. **Az első hibaforrás az ún. idealizációból ered**. A valós fizikai rendszer bizonyos, általunk lényegesnek tartott tulajdonságait beépítjük a diszkrét modellünkbe, más tulajdonságokat viszont nem (pl. lehet, hogy egy sztatikai számítás esetén figyelmen kívül hagyhatjuk a hőmérséklet hatásait – ez lehet jogos, de lehet, hogy nem az). A figyelembe vett fizikai paraméterek mértékszámai mérési eredményeken alapulnak, így ezek is bizonyos hibával terheltek (pl. rugalmassági együttható, hővezetési tényező). **A fizikai rendszer alakját a diszkrét modell bizonyos hibával közelíti.** Mindezek tehát az idealizációból és a diszkretizációból fakadó hibák. A másik hibaforrás matematikai jellegű. Abból adódik, hogy a

diszkrét modellt, mint matematikai feladatot általában nem lehet egzaktul megoldani, hanem annak egy közelítését adhatjuk meg.



Bevezető példa: a vízvezeték rendszer

Ez a példa megmutatja, hogy írjuk le a diszkrét rendszereket. Egy vízvezeték rendszert vizsgálunk, amely egyenes csődarabokból áll. A csődarabok vízáteresztő képessége arányos a végpontjaik magasságkülönbségével. Két ilyen egyenes csődarab találkozási pontjában víz léphet ki a rendszerből, vagy léphet be abba. A csőhálózat működését folyamatosnak és állandósultnak képzeljük el.



2. ábra: A fizikai rendszer

A csődarabok végpontjainak magasságát h betű jelöli, a végpontokat megszámozzuk. A fizikai rendszer modellje két elemből áll, amelyeket végpontjaik magasságával jellemzünk.



3. ábra: A vízvezeték rendszer diszkrét modellje

A diszkrét modell (1) számú eleme az 1. csőnek felel meg. Vegyük észre: a modell nem tartalmaz információkat a cső keresztmetszetéről, a cső falának anyagáról, a hőmérsékletről, stb. A modell csak a csövek végeinek magasságkülönbségét ismeri, a csőben áramló folyadék áramerősségét, illetve ezen mennyiségek közötti matematikai kapcsolatokat adja meg (ld. alább).

Először egy bizonyos elem tulajdonságait vizsgáljuk meg. Legyen az elem sorszáma e=1,2.



4. ábra

Az elem 1. végpontjának magassága h_1^e , a 2. végpont magassága h_2^e . Az 1. végponton befolyó víz áramsűrűsége j_1^e , a 2. végpontban ugyanez a mennyiség j_2^e . Korábban említettük, hogy a csővezeték vízáteresztő képessége arányos a végpontjának magasságkülönbségével. Ezt így fejezzük ki matematikai alakban:

$$j_1^e = c(h_1^e - h_2^e)$$

Azt is tudjuk, hogy a tömegmegmaradás miatt, amennyi folyadék beáramlik az egyik végpontban, annyi fog kiáramlani a másik végpontban:

$$j_2^e = -j_1^e = -c(h_1^e - h_2^e) = c(-h_1^e + h_2^e)$$

A fenti formulában c egy tetszőleges arányossági tényező. Az egyszerűség kedvéért most c=1. Vezessük be a következő vektorokat:

$$\overline{j^{e}} = \begin{bmatrix} j_{1}^{e} \\ j_{2}^{e} \end{bmatrix}; \quad \overline{h^{e}} = \begin{bmatrix} h_{1}^{e} \\ h_{2}^{e} \end{bmatrix};$$

Az áramerősségek és a magasságok közötti, fenti összefüggések így egyszerűbb formában írhatók le:

$$\begin{bmatrix} j_1^e \\ j_2^e \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^e \\ h_2^e \end{bmatrix};$$

vagy

$$\overline{j^{e}} = \underline{\underline{K}^{e}}\overline{\underline{h}^{e}}$$

Végezzük el a mátrix műveleteket, hogy ellenőrizhessük a formuláink helyességét! A

$$\underline{\underline{K}}^{e} = c \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} m^{2} / h$$

mátrixot az (e) elem merevségi mátrixának nevezzük. Példánkban

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(1)} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(2)} = c \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{m}^2 / \mathbf{h}$$

Amikor a véges elem viselkedését leírtuk, akkor az elemhez kapcsolt lokális viszonyítási rendszert használtunk. Ez abban nyilvánult meg, hogy az általánosan elképzelt (e) elem baloldali végpontját 1. a jobboldalit pedig 2. sorszámmal láttuk el.

Ezen a ponton eljutottunk a részekre bontás végéig. Megadtuk a csőrendszer diszkrét modellje építőelemeinek matematikai leírását. Most átlépünk a modellalkotás második fázisába: az egyes véges elemekből összeállítjuk a teljes modellt. Ez azt jelenti, hogy a teljes modellt jellemző fizikai mennyiségek közötti kapcsolatot kell megadnunk mátrixegyenlet formájában.

Az egyes elemekre használt lokális jelölésekről most át kell térnünk a teljes modellre vonatkozó jelölésekre. Ez elsősorban a csomópontok sorszámozására vonatkozik, és ezzel együtt az áramerősségek és magasságok indexelésére is. Az (1) elemnél nincs változás. A (2) elemnél így alakulnak a jelölések:

$$\bar{j}^{(2)} = \begin{bmatrix} j_2^{(2)} \\ j_3^{(2)} \end{bmatrix}; \ \bar{h}^2 = \begin{bmatrix} h_2^{(2)} \\ h_3^{(2)} \end{bmatrix};$$

Gondoljuk át, hogy ebben a rendszerben a víz honnan hová áramolhat. A rendszer (diszkrét modell) összetevői: az 1., 2. és 3. csomópontok, és az (1), (2) végeselemek. A végeselemek a csomópontokban találkoznak egymással. Minden egyes csomópontba be-és kiáramolhat a víz a hozzá csatlakozó csövekből, illetve a környezetből. Például a 2. csomópontba áramolhat víz az (1) csőből, a (2) csőből és a környezetből (mondjuk egy csapon keresztül).

A tömegmegmaradás törvénye a 2. csomópontra is igaz, ami az eddig bevezetett jelölésekkel így írható:

$$j_2^{(1)} + j_2^{(2)} = j_2$$

A $j_2^{(1)}$ és $j_2^{(2)}$ akkor pozitív, ha az (1) ill. (2) elemekbe a 2. csomópontból befelé áramlik a víz, a j_2 pedig akkor pozitív, ha a környezetből a 2. csomópontba áramlik a víz. A fenti egyenlet azt fejezi ki, hogy amennyi víz elfolyik az (1) és (2) elemekbe, annyit kell pótolni a rendszerbe kívülről a 2. csomópontban (ha minden mennyiség pozitív). A <u>K</u>⁽²⁾ merevségi mátrixának indexelése is megváltozik.

$$\underline{\underline{K}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ (2) \\ (3) \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A globális indexelés használatának megkönnyítése érdekében minden áramerősség vektort és merevségi mátrixot kiegészítjük a harmadik indexnek megfelelő elemmel, illetve nulla sorokkal és oszlopokkal:

$$\bar{j}^{(1)} = \begin{bmatrix} j_1^{(1)} \\ j_2^{(1)} \\ j_3^{(1)} \end{bmatrix}; \quad \bar{j}^{(2)} = \begin{bmatrix} j_1^{(2)} \\ j_2^{(2)} \\ j_3^{(2)} \end{bmatrix}$$
$$\underline{\underline{K}}^{(1)} = c \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} m^2 / h; \qquad \underline{\underline{K}}^{(2)} = c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} m^2 / h$$

A magasság vektor pedig így alakul:

$$\overline{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{h}_3 \end{bmatrix}$$

ezzel:

$$\overline{\mathbf{j}}^{(1)} = \underline{\underline{K}}^{(1)}\overline{\mathbf{h}} \; ; \; \overline{\mathbf{j}}^{(2)} = \underline{\underline{K}}^{(2)}\overline{\mathbf{h}}$$

Ez volt a globalizáció: lokális jelölésekről áttértünk a globális jelölésekre. Most következik az összefűzés.

A tömegmegmaradás egy tetszőleges csomópontban:

$$\begin{split} j_i^{(1)} + j_i^{(2)} &= j_i \\ \sum_{k=l}^3 K_{ik}^{(1)} h_k + \sum_{k=l}^3 K_{ik}^{(2)} h_k &= j_i \\ \sum_{k=l} (K_{ik}^{(1)} + K_{ik}^{(2)}) h_k &= j_1 \end{split}$$

Mindez összefoglalható az alábbi mátrixegyenlet formájában.

$$\underline{\underline{K}}\overline{\underline{h}} = \overline{j}$$

Itt \underline{K} a teljes diszkrét rendszer merevségi mátrixa.

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(1)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{m}^2 / \mathbf{h};$$

Ez az egyenlet kapcsolatot teremt a csomópontok magassága és az abba a környezetből befolyó áramerősségek között. A h és j vektorok összesen 6 skalár komponense közül csak 3 lehet ismeretlen.

Lássuk a legegyszerűbb példát, és azt, hogy mit tudhatunk meg a csőhálózatról a felállított modellünk segítségével!

Legyen adott a három csomópont magassága: $h_1=25$ m, $h_2=10$ m, $h_3=5$ m. (c=1) Ekkor:

$$\underline{\underline{K}}\bar{\underline{h}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \\ -5 \end{bmatrix} m^3/h = \bar{j}$$

Ezzel megtudtuk a csomópontok és a környezet közötti víz áramerősségét. Vajon mi zajlik az egyes elemeken belül?

$$\underline{\underline{K}}^{(1)}\overline{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{m}^2 / \mathbf{h} \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} \mathbf{m} = \begin{bmatrix} 15 \\ -15 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{m}^3 / \mathbf{h} = \overline{\mathbf{j}}^{(1)}$$
$$\underline{\underline{K}}^{(2)}\overline{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{m}^2 / \mathbf{h} \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} \mathbf{m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} \mathbf{m}^3 / \mathbf{h} = \overline{\mathbf{j}}^{(2)}$$

Az eredményeket az alábbi ábrán foglalhatjuk össze:



5. ábra

A rendszer modellje alkalmas más jellegű számítások elvégzésére is. Írjuk elő, hogy $j_1=10$ m³/h, $h_2=20$ m és $j_3=-15$ m³/h legyen, és a feladat az, hogy számítsuk ki, milyen j_2 , h_1 és h_3 esetén valósítható ez meg. Egyenletünk most az alábbi:

$$\underline{\underline{K}} \mathbf{h} = \mathbf{j}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{m}^2 / \mathbf{h} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ 20 \\ \mathbf{h}_3 \end{bmatrix} \mathbf{m} = \begin{bmatrix} 10 \\ \mathbf{j}_2 \\ -15 \end{bmatrix} \mathbf{m}^3 / \mathbf{h}$$

Most a megoldás nem olvasható ki közvetlenül ebből az összefüggésből, hanem meg kell oldanunk az egyenletet. A mátrix műveletek elvégzése után az alábbi alakba hozható ez a feladat:

$$h_1 - 20 = 10$$

 $-h_1 + 40 - h_3 = j_2$
 $-20 + h_3 = -15$

Az egyenlet megoldása:

 $h_1=30 \text{ m}; h_3=5 \text{ m}; j_2=5 \text{ m}^3/h;$

A feladatban előírt állapotot megvalósító rendszer tehát:





A csövekben az áramerősségeket a $\underline{\underline{K}}^{(1)}\overline{\underline{h}} = \overline{j}^{(1)}$ és a $\underline{\underline{K}}^{(2)}\overline{\underline{h}} = \overline{j}^{(2)}$ összefüggések adják, az előző feladatban ismertetett módon.

Házi feladat

1. Adja meg az alábbi csővezeték rendszer diszkrét matematikai modelljét, és számítsa ki az áramerősségeket $h_1=20 \text{ m}, h_2=30 \text{ m}, h_3=5 \text{ m}; h_4=15 \text{ m}$ esetén!





Megoldás:

$$\underline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{m}^2 / \mathbf{h} \qquad \overline{\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} -10 \\ 35 \\ -35 \\ 10 \end{bmatrix} \mathbf{m}^3 / \mathbf{h}$$

2. Építse fel az ábrán látható csővezeték rendszer diszkrét matematikai modelljét! Miben hasonlít és miben tér el az előző feladatban vizsgált rendszertől? Keresse meg a megoldást, ha adott h_1 =50 m; j_2 =0 m³/h; j_3 =-10 m³/h; h_4 =20 m!



8. ábra

A végeselem módszer lépései

A rácsos tartószerkezetek

A következőkben egy, a szakirodalomban elterjedten használt példával szeretnénk bemutatni a végeselem módszer lépéseit. A rácsos tartók vizsgálata során látni fognak a végeselem módszerre jellemző elvi megfontolásokat és matematikai eszközöket. A legegyszerűbb rácsos tartó három elemből álló, csuklós csatlakozású szerkezet, ezt fogjuk felhasználni illusztrációként.



9. ábra

A rácsos tartók szerkezeti elemei a tagok, amelyek általában hosszúkás alakú szilárd testek. A tagok a végpontjaikban a csatlakozásnál kapcsolódnak össze. A csatlakozások technikai megoldására példa a szegecselés, hegesztett kötés, csavar kötés. A rácsos tartók vizsgálata során gyakran idealizáljuk a feladatot. A csatlakozásokat súrlódásmentes csuklókra cseréljük fel, amelyek nem fejtenek ki ellenállást a rudaknak a csatlakozási pont körüli elforduláskor, a tagokat pedig kizárólag axiális irányú (a két végpontján levő csatlakozási pontokat összekötő egyenesbe eső) erőt kifejteni képes rudaknak tekintjük.

A rácsos tartók tagjait a modellben az ún. két csomópontú rúdelemmel helyettesítjük. Ez a legegyszerűbb, szilárdságtani feladatokban használt végeselem. Lineáris rugó elemnek is hívják, mert a megnyúlása és a rá ható erő közötti összefüggés megegyezik a rugalmas erőtörvénnyel. A rácsos tartók közötti összefüggés megegyezik a rugalmas erőtörvénnyel. A rácsos tartók legegyszerűbb modellje a rugókból álló rendszer (súrlódásmentes csuklós csatlakozásokkal).



10. ábra

Természetesen, itt a rugókat ideálisnak kell tekinteni abban az értelemben is, hogy összenyomás esetén sem hajlanak ki oldalra, tehát a lineáris erőtörvény húzásra és összenyomásra egyaránt érvényes.

Ha a 10. ábra alapján összevetjük a lineáris rugóelemet a 64 csomópontú köbös téglatest elemmel, sejthetjük, hogy matematikai leírásuk összetettsége lényegesen eltérő.



11. ábra: A legegyszerűbb és a legösszetettebb végeselem: a.) két csomópontú rúdelem b.) 64 csomópontú köbös téglatest elem

A legegyszerűbb és legbonyolultabb végeselemekből felépített modellek matematikai leírása azonos elvek alapján, azonos eszközökkel valósítható meg.

A rácsos tartók végeselem modelljének ismertetése bevezető példaként több előnnyel jár:

- 1. A matematikai leírás analógiája miatt jól előkészíti más, összetettebb elemekből álló modellek megértését és használatát.
- 2. A legegyszerűbb tartók esetén a számítások kézzel is elvégezhetők, ami megalapozza a későbbi számítógépes alkalmazások elkészítését, vagy azok értő használatát.

Idealizálás és modellalkotás

Amikor a rácsos tartót rudakból súrlódásmentes csuklókkal összeállított szerkezetként képzeljük el, akkor az eredeti tartót idealizáltuk. ezzel a valódi probléma egyfajta közelítését fogalmaztuk meg. Bizonyos, általunk lényegtelennek ítélt tulajdonságaitól eltekintettünk, mint például a csatlakozási pontokban fellépő oldalirányú erőktől, és ezzel együtt a rudakra ható hajlító igénybevételtől. Más tulajdonságokat, mint például az axiális erőket, és azt, hogy a rudak csatlakozó végpontjai mindig együtt mozognak, beépítettük az idealizált tartó jellemzői közé. Figyelmen kívül hagytunk egy sor más adatot is: a rudak színét, hőmérsékletét, elektromos vezetőképességét stb. is.

Valójában ha figyelembe szeretnénk venni minden egyes, a tartószerkezettel kapcsolatos adatot, akkor kezelhetetlenül nagy információtömeggel találnánk szembe magunkat. Ugyanakkor ezek információk jelentős része teljesen felesleges volna, más részük kevés befolyással bír a vizsgált rendszerre, és csak kis hányaduk igazán lényeges a feladat szempontjából. Az idealizáció feladata tehát igen jelentős: el kell választanunk a lényegest a lényegtelentől azzal a céllal, hogy a későbbi számítási munkát a lehető legkisebb mértékűre csökkentsük, de mégse vesszenek el a vizsgált jelenség szempontjából meghatározó információk. idealizáció nélkül nincs modellalkotás, de talán emberi gondolkodás sem. A valóság végtelen tengeréből meg kell ragadnunk egy használható, de véges, sőt számunkra hatékonyan kezelhetően kis méretű részhalmazt. Érdemes rácsodálkoznunk arra, hogy egyáltalán képesek vagyunk ilyen műveletre! Az idealizáció tehát gondolkodásunk számára hozzáférhetővé teszi a valóság egy részét. Más oldalról pedig korlátozza számításaink érvényességi körét. Bármilyen eredményre is jutunk a későbbiekben, mindig hozzá kell tennünk: "feltéve, hogy az idealizáció során elfogadott állítások igazak."

A tapasztalat azt mutatja, hogy a rácsos tartók vizsgálata esetén a bemutatott idealizáció jól használható. Ne tévesszük össze az idealizált problémát a modellel. Közös bennük az, hogy mindkettő az emberi elme szüleménye, és az is, hogy céljuk ugyanannak a valóságnak a leírása. Míg azonban az idealizált feladat inkább filozófiai jelegű elképzelés, addig a modell a feladat matematikai leírását jelenti. Ha rendelkezésünkre áll a modell, akkor matematikai műveletek elvégzésével választ adhatunk a kérdések bizonyos halmazára. A modellalkotás során

- 1. Definiáljuk a rendszer állapotát leíró mennyiségeket.
- 2. Definiáljuk a környezet hatását leíró mennyiségeket.
- 3. Megadjuk a rendszer viselkedését leíró törvényszerűségeket.

Ezek a törvényszerűségek általában az 1. és 2. pontban meghatározott mennyiségeket tartalmazó egyenletek, egyenletrendszerek.

A háromtagú rácsos tartó matematikai modellje

Vizsgálatunk tárgya az idealizált háromtagú rácsos tartó, amely súrlódásmentes csuklókkal összekapcsolt ideálisan rugalmas rudakból áll.





Az ábrán vázolt szerkezet helyzete egyértelműen megadható a rudak csatlakozási pontjainak helyével.

Minden pontot és minden rudat sorszámmal látunk el, amit majd a fizikai mennyiségek indexelésére fogunk használni. A csatlakozási pontok elmozdulás vektorait és az erővektorokat az ábrán szemléltetett síkbeli derékszögű koordináta rendszerben adjuk meg. ezt globális koordináta rendszernek nevezzük. Az elmozdulás vektorok koordinátáit U_{x1}, U_{y1}, stb. betűkkel jelöljük, a csomópontokra ható erők vektorait pedig A_{x1}, A_{y1}, stb. betűkkel.



A rudakat prizmatikusnak tekintve keresztmetszetüket $A^{(i)}$, hosszukat $L^{(i)}$, rugalmassági együtthatójukat pedig $E^{(i)}$ jelöli. A rudakra vonatkozó mennyiségek indexeit a mennyiség betűjelének jobb felső sarkába írjuk, és azért tesszük zárójelbe, hogy megkülönböztessük a hatványkitevőtől.



Mindegyik rúdra érvényes a Hooke-törvény (ezt feltételezzük az idealizációval):

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}\mathbf{A}\frac{\Box \mathbf{L}}{\mathbf{L}}$$

ahol F a rúdban a □L megnyúlás következtében ébredő erő, A, E és L pedig a fentebb mondottak szerint értendő. Vessük ezt össze a rugalmas erőtörvénnyel:

$$F = k \Box I$$

ahol F a rugóban ébredő erő \Box L megnyúlás esetén, k pedig a rugóállandó. Az ideálisan rugalmas prizmatikus rúd helyettesíthető egy olyan rugóval, amelynek rugóállandója:

$$k = \frac{EA}{L}$$

Ha a rúd nem prizmatikus, de ideálisan rugalmas, akkor is hozzárendelhető a k rugóállandó, de az már nem áll ilyen egyszerű kapcsolatban a rúd geometriai adataival.

Megtettük a modellalkotás első két lépését. A rendszer állapotát jellemzik a csatlakozási pontok (u_{xi} , u_{yi}) koordinátái, a rudakat pedig az $A^{(i)}$, $E^{(i)}$, $L^{(i)}$ és az ezekből kiszámítható $k^{(i)}$ mennyiségek. A környezet hatását a csomópontokban ható (f_{xi} , f_{yi}) erők írják le.

A rendszer állapotát leíró változókat (koordinátákat) egyetlen vektorban is összefoglalhatjuk. Hasonlóan járunk el az erők komponenseivel is.

$$\overline{U} = \begin{bmatrix} U_{x1} \\ U_{y1} \\ U_{x2} \\ U_{y2} \\ U_{x3} \\ U_{y3} \end{bmatrix} \overline{A} = \begin{bmatrix} A_{x1} \\ A_{y1} \\ A_{x2} \\ A_{x2} \\ A_{y2} \\ A_{x3} \\ A_{y3} \end{bmatrix}$$

Az \overline{U} vektor (általánosított elmozdulás vektor) komponensei a feladat elsődleges változói. Nevezik ezeket állapotváltozóknak is, vagy fizikai szemlélet alapján szabadsági fokoknak is. Esetünkben a vizsgált rendszer 6 szabadsági fokú.

A matematikai modellalkotás során kapcsolatot kell megadnunk \overline{U} és \overline{A} vektorok között. Mivel az idealizált rácsos tartó viselkedését lineárisnak feltételezzük, ezért az \overline{U} és \overline{A}

vektorok közötti kapcsolatnak is lineárisnak kell lennie. A lineáris összefüggéseket mátrixokkal írjuk le:

$$\begin{bmatrix} A_{x1} \\ A_{y1} \\ A_{x2} \\ A_{y2} \\ A_{x3} \\ A_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{x1x1} & K_{x1y1} & K_{x1x2} & K_{x1y2} & K_{x1x3} & K_{x1y3} \\ K_{y1x1} & K_{y1y1} & K_{y1x2} & K_{y1y2} & K_{y1x3} & K_{y1y3} \\ K_{x2x1} & K_{x2y1} & K_{x2x2} & K_{x2y2} & K_{x2x3} & K_{x2y3} \\ K_{y2x1} & K_{y2y1} & K_{y2x2} & K_{y2y2} & K_{y2x3} & K_{y2y3} \\ K_{x3x1} & K_{x3y1} & K_{x3x2} & K_{x3y2} & K_{x3x3} & K_{x3y3} \\ K_{y3x1} & K_{y3y1} & K_{y3x2} & K_{y3y2} & K_{y3x3} & K_{y3y3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{x1} \\ U_{y1} \\ U_{y2} \\ U_{y2} \\ U_{x3} \\ U_{y3} \end{bmatrix}$$

Ezt tömörebben írhatjuk mátrixok segítségével:

$$\overline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{K}}\overline{\mathbf{U}}$$

A K mátrix neve: globális merevségi mátrix. A globális merevségi mátrix szimmetrikus, elemei a merevségi együtthatók.

Ezzel eljutottunk a matematikai modellalkotás végére. Ismerjük a mennyiségeket, amelyekkel dolgoznunk kell, és felírtuk a közöttük fennálló összefüggést. A \underline{K} mátrix kiszámítása további feladatot ad nekünk.

Elemekre bontás és lokalizálás

A végeselem módszer egyik alapvető lépése az elemekre bontás. Az egyes elemek leírását az elemhez kötött, lokális koordináta rendszerben adjuk meg. Ezt követően a lokális koordináta rendszerben egy elem matematikai leírását, modelljét készítjük el.

A háromtagú rácsos tartó esetén az elemekre bontás a képzeletbeli csuklók megbontását, és a rudak különválasztását jelenti. Egy rúd egy elem, a végpontjait csomópontoknak nevezzük. A csomópontokban értelmezzük azokat a fizikai mennyiségeket (esetünkben az elmozdulás vektorokat és az erő vektorokat), amelyekkel jellemezzük az elem állapotát.

Mindegyik elemhez ún. lokális koordináta rendszert kötünk az ábra szerint.



13. ábra: Az elemekre bontott tartó a lokális koordináta rendszerekkel

A lokális koordináta rendszer origója lehet valamely csomópontban vagy az elem felezőpontjában, ezek mindegyike célszerű választás. Az x tengely iránya egybeesik az elem irányával.

Vegyük észre, hogy mindhárom elem, amelyekre szétbontottuk a tartót két csomópontú lineáris rúdelem (rugó elem), csupán a paramétereikben különböznek egymástól. Ezért az indexek elhagyásával általánosan tárgyalhatók. A rúdelem egyik csomópontját jelöljük i, a másikat j betűkkel (i,j=1,2,3 értelemszerűen), az elem indexét pedig most nem írjuk ki.



14. ábra: A két csomópontú lineáris rúdelem, és fizikai interpretációja: a k rugóállandójú, L hosszúságú rugó. A koordináta rendszer tengelyeinek betűjeleiben a vessző arra utal ,hogy lokális koordináta rendszerről van szó.

Most adjuk meg a lokális koordináta rendszerben a helykoordináták és az erő koordináták közötti összefüggést.

$$U'_{yi} = U'_{yj} = 0$$

$$A'_{vi} = A'_{vi} = 0$$

mert a rúdelem megnyúlása és a benne ébredő erő is csak axiális, azaz x' tengely irányú lehet (a lokális rendszerben!).

$$U'_{xi} - U'_{xi} = \Box L$$

Az elmozdulások különbsége az elem megnyúlása. A hatás-ellenhatás elvéből pedig az x irányú erőkomponensek közötti összefüggés adódik:

$$\mathbf{A'}_{\mathrm{xi}} = -\mathbf{A'}_{\mathrm{xi}}$$

A rugalmas erőtörvény összekapcsolja az elmozdulás mező és az erők komponenseit:

$$\mathbf{A'}_{xj} = \mathbf{k} \Box \mathbf{L} = \mathbf{k} (\mathbf{U'}_{xj} - \mathbf{U'}_{xi})$$
$$\mathbf{A'}_{xi} = -\mathbf{A'}_{xi} = -\mathbf{k} \Box \mathbf{L} = -\mathbf{k} (\mathbf{U'}_{xi} - \mathbf{U'}_{xi})$$

Az elem csomópontjaiban érvényes elmozdulás komponenseket és erőkomponenseket egyegy vektorban foglaljuk össze:

$$\overline{\mathbf{U}}' = \begin{bmatrix} \mathbf{U'}_{xi} \\ \mathbf{U'}_{yi} \\ \mathbf{U'}_{xj} \\ \mathbf{U'}_{yj} \end{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A'}_{xi} \\ \mathbf{A'}_{yi} \\ \mathbf{A'}_{xj} \\ \mathbf{A'}_{yj} \end{bmatrix}$$

Az erőtörvényeket egy mátrixegyenletben is összefoglalhatjuk:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A'}_{xi} \\ \mathbf{A'}_{yi} \\ \mathbf{A'}_{xj} \\ \mathbf{A'}_{yj} \end{bmatrix} = \mathbf{k} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U'}_{xi} \\ \mathbf{U'}_{yi} \\ \mathbf{U'}_{yj} \end{bmatrix}$$

A mátrixműveletek elvégzésével győződjünk meg arról, hogy ez az egyenlet egyenértékű a korábbi négy egyenlőséggel! Ugyanezt rövidebben is írhatjuk:

$$\overline{A}' = \underline{\underline{K}}'\overline{\underline{U}}$$

А

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}' = \mathbf{k} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{E}\mathbf{A}}{\mathbf{L}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix a két csomópontú lineáris rúdelem merevségi mátrixa. Ennek segítségével adott elmozdulások esetén kiszámíthatjuk a csomópontokban ható erőket (a csomópont által az elemre ható erők).

Áttérés a globális koordináta rendszerre

Az egyes elemek matematikai modellje alapján elkészíthető a teljes feladat globális merevségi mátrixa. Ehhez először az egyes elemek lokális koordináta rendszereiből az adatokat át kell transzformálnunk a globális koordináta rendszerbe. A transzformáció megértéséhez használjuk a következő ábrát.



15. ábra: A lokális és a globális koordináta rendszerek közötti transzformáció, ha az xtengelyek φ szöget zárnak be.

Az ábra alapján:

$$U_{xi} = U'_{xi} \cos \varphi - U'_{yi} \sin \varphi$$
$$U_{yi} = U'_{xi} \sin \varphi + U'_{yi} \cos \varphi$$
$$U_{xj} = U'_{xj} \cos \varphi - U'_{yj} \sin \varphi$$
$$U_{yj} = U'_{xj} \sin \varphi + U'_{yj} \cos \varphi$$

Ugyanez mátrixok segítségével is leírható:

$$\begin{bmatrix} U_{xi} \\ U_{yi} \\ U_{xj} \\ U_{yj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U'_{xi} \\ U'_{yi} \\ U'_{yj} \\ U'_{yj} \end{bmatrix}$$

tömörebben

A fordított transzformáció:

$$\overline{U}' = \underline{T}\overline{U}$$

 $\overline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{T}}^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{U}}'$

A \underline{T} a transzformációs mátrix, a jobb felső indexbe írt T betű a transzponálás jele. Az erő vektorok ugyanúgy transzformálódnak:

$$\overline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{T}}^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{A}}$$
$$\overline{\mathbf{A}}' = \underline{\mathbf{T}} \overline{\mathbf{A}}$$

Vegyük észre, és ellenőrizzük, hogy

$$\underline{\underline{T}}^{\mathrm{T}} = \underline{\underline{T}}^{-1},$$

azaz a transzformációs mátrix transzponáltja megegyezik az inverzével. Ebből az következik, hogy

$$\underline{\Gamma}\underline{T}^{-1} = \underline{T}\underline{T}^{T} = \underline{E}$$

ahol \underline{E} az egységmátrix. Ez az összefüggés ad lehetőséget az ellenőrzésre.

Ahhoz, hogy az elem merevségi mátrixának transzformációs szabályát megállapítsuk, tekintsük át az eddig megismert összefüggéseket:

$$\overline{A}' = \underline{\underline{K}}'\overline{\underline{U}}$$
$$\overline{\underline{U}}' = \underline{\underline{T}}\overline{\underline{U}}$$
$$\overline{A}' = \underline{\underline{T}}\overline{A}$$

Behelyettesítéssel kapjuk, hogy:

$$\underline{\underline{T}}\overline{\underline{A}} = \underline{\underline{K}}' \underline{\underline{T}}\overline{\underline{U}} / \underline{\underline{T}}^{\mathrm{T}} \cdot$$
$$\overline{\underline{A}} = \underline{\underline{T}}^{\mathrm{T}} \underline{\underline{K}}' \underline{\underline{T}}\overline{\underline{U}}$$

Hasonlítsuk ezt össze a globális koordináta rendszerben felírt

$$\overline{A} = \underline{\underline{K}}\overline{\underline{U}}$$

egyenlőséggel:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{\mathrm{T}} \underline{\underline{\mathbf{K}}}' \underline{\underline{\mathbf{T}}}$$

Most vezessük be újra az elemekre vonatkozó indexek használatát, és írjuk fel a transzformációkat:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(1)} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(1)} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(1)'} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(1)T}$$
$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(2)} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(2)} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(2)'} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(2)T}$$
$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(3)} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(3)} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(3)'} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(3)T}$$

A $\underline{\underline{K}}^{(1)}, \underline{\underline{\underline{K}}}^{(2)}$ és $\underline{\underline{\underline{K}}}^{(3)}$ mátrixok az elemek merevségi mátrixai globális koordináta rendszerben. A $\underline{\underline{\underline{T}}}^{(1)}, \underline{\underline{\underline{T}}}^{(2)}$ és $\underline{\underline{\underline{T}}}^{(3)}$ a transzformációs mátrixok, amelyek esetünkben csak az adott elemnek a globális x tengellyel bezárt $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ szögétől függenek. A $\underline{\underline{\underline{K}}}^{(1)'}, \underline{\underline{\underline{K}}}^{(2)'}$ és $\underline{\underline{\underline{K}}}^{(3)'}$ mátrixok külön figyelmet érdemelnek. Ezek az (1), (2) és (3) elemek lokális koordináta rendszerében felírt merevségi mátrixok. Mindhárom

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(1)'} = \mathbf{k}^{(i)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alakú, azaz csak a k⁽ⁱ⁾ szorzószámban térnek el egymástól. Azért fontos ezt meglátnunk, mert ebből értjük meg az elemekre bontás, és az általános elem matematikai modelljének hasznát. Ha az általános elem leírása a birtokunkban van, akkor azt megfelelő konstansok alkalmazásával (amelyek anyagra és méretre jellemzők általában) bármely ugyanolyan típusú elem esetén felhasználhatjuk. Azt mondhatjuk, hogy a globális koordinátarendszerben felírt $\underline{K}^{(i)}$ merevségi mátrixok lényegében ugyanannak az általános, lokális koordináta rendszerben felírt mátrixának a képei. Úgy jönnek létre, hogy az általános elem lokális merevségi mátrixát megszorozzuk egy számmal, majd koordináta transzformációt hajtunk végre rajta.

Összeállítás/összefűzés

Miután meghatároztuk az egyes elemek merevségi mátrixait a globális koordináta rendszerben, lehetőségünk nyílik a teljes rendszer merevségi mátrixának előállítására. Ezt jelképesen "összeszerelésnek" is hívják, mert fizikai interpretációja a rácsszerkezet elemekből való összeszerelése. Matematikai értelemben is az ismert részekből építjük fel az egészet, ezt a folyamatot " összefűzésnek" is nevezik.

A feladat az, hogy megmondjuk, hogyan járulnak hozzá az egyes elemek merevségi mátrixai a globális merevségi mátrixhoz. Két szabályt kell figyelembe vennünk:

- 1. Az elmozdulások kompatibilitása (illeszkedése): az egy csatlakozási ponthoz tartozó csomópontok elmozdulása azonos. (Az összekötött rúdvégződések együtt mozognak.)
- 2. Az erők egyensúlya: egy csatlakozási pontban a rudak (elemek) által a pontra kifejtett erő eredője éppen kiegyenlíti a külső erőhatást. (Ha ez minden pontban teljesül, akkor a rácsos tartó egyensúlyban van.)

Az első fontos lépés a mátrixok kiegészítése. Az erő vektorokat és a merevségi mátrixokat nulla sorokkal és oszlopokkal egészítjük ki, hogy összeadhatóak legyenek. Ezt egy példán mutatjuk be. Az $\overline{f}^{(1)}$ vektor megadja a csomópontokban az (1) elemre ható erőket.



16. ábra: az (1) elemre ható erők

A vektor komponensei:

$$\bar{\mathbf{f}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{x1}^{(1)} \\ \mathbf{f}_{y1}^{(1)} \\ \mathbf{f}_{x2}^{(1)} \\ \mathbf{f}_{y2}^{(1)} \end{bmatrix}$$

Ez egy négykomponensű vektor, amely az 1. és 2. csomópontokra vonatkozóan tartalmaz adatokat. Pl. $\overline{f}_{x1}^{(1)}$ az 1. csomópont által az (1) elemre kifejtett erő x komponensét jelenti. Egészítsük ki ezt a vektort $\overline{f}_{x3}^{(1)}$ és $\overline{f}_{y3}^{(1)}$ komponensekkel:

$$\overline{\mathbf{f}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{x1}^{(1)} \\ \mathbf{f}_{y1}^{(1)} \\ \mathbf{f}_{y2}^{(1)} \\ \mathbf{f}_{y2}^{(1)} \\ \mathbf{f}_{y3}^{(1)} \\ \mathbf{f}_{y3}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{x1}^{(1)} \\ \mathbf{f}_{y1}^{(1)} \\ \mathbf{f}_{y2}^{(1)} \\ \mathbf{f}_{y2}^{(1)} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Az utolsó két komponens mindig nulla, hiszen a 3. csatlakozási pont nem érintkezik az (1) elemmel, tehát erőt sem fejthet ki rá.

Hasonlóan a $\underline{\underline{K}}^{(1)}$ merevségi mátrixot is kiegészítjük két sorral és két oszloppal, amelyek nullákkal vannak feltöltve.

Az elmozdulás vektorokkal még egyszerűbb dolgunk van. Az elmozdulások kompatibilitása miatt írhatjuk, hogy

 $\begin{array}{l} \begin{array}{c} -(1) & -(3) & -(1) & -(3) \\ u_{x1} & = u_{x1}; \\ u_{y1} & = u_{y1}; \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} (1) & -(3) & -(1) & -(2) \\ u_{x2} & = u_{x2}; \\ u_{y2} & = u_{y2}; \\ u_{y2} & = u_{y3}; \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} (1) & -(2) & -(3) \\ u_{x3} & = u_{x3}; \\ u_{y3} & = u_{y3} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} (1) & -(2) & -(3) \\ u_{x3} & = u_{x3}; \\ u_{y3} & = u_{y3} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} (1) & -(2) & -(3) \\ u_{x3} & = u_{x3}; \\ u_{y3} & = u_{y3} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} (1) & (1) & -(2) & -(3) \\ u_{x1} & = u_{x1}; \\ u_{y1} & = u_{y1}; \\ u_{y2} & = u_{y2}; \\ u_{y2} & = u_{y2}; \\ u_{x3} & = u_{x3}; \\ u_{y3} & = u_{y3} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} (1) & (1) & (1) & (1) \\ u_{x3} & = u_{x3}; \\ u_{y3} & = u_{y3} \\ u$

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{x1} \\ \mathbf{u}_{y1} \\ \mathbf{u}_{x2} \\ \mathbf{u}_{y2} \\ \mathbf{u}_{x3} \\ \mathbf{u}_{y3} \end{bmatrix}$$

Alakban használható. Lássunk egy példát a kiegészített mátrixok használatára. Az $\overline{f}^{(1)} = \underline{K}^{(1)} \cdot \overline{u}^{(1)}$ összefüggés az alábbi alakot ölti:

$$\overline{\mathbf{f}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{x1}^{(1)} \\ \mathbf{f}_{y1}^{(1)} \\ \mathbf{f}_{y2}^{(1)} \\ \mathbf{f}_{y2}^{(1)} \\ \mathbf{f}_{y3}^{(1)} \\ \mathbf{f}_{y3}^{(1)} \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{K}}^{(1)} \overline{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{x1x1}^{(1)} & \mathbf{K}_{x1y1}^{(1)} & \mathbf{K}_{x1x2}^{(1)} & \mathbf{K}_{x1y2}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{y1x1}^{(1)} & \mathbf{K}_{y1y1}^{(1)} & \mathbf{K}_{y1x2}^{(1)} & \mathbf{K}_{y1y2}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{x2x1}^{(1)} & \mathbf{K}_{x2y1}^{(1)} & \mathbf{K}_{x2x2}^{(1)} & \mathbf{K}_{x2y2}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{y2x1}^{(1)} & \mathbf{K}_{y2y1}^{(1)} & \mathbf{K}_{y2x2}^{(1)} & \mathbf{K}_{x2y2}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{K}}^{(1)} \cdot \overline{\mathbf{u}}$$

Látszik, hogy $\overline{f}_{x3}^{(1)} = \overline{f}_{y3}^{(1)} = 0$ mindig teljesül, és az is, hogy csak az elmozdulások lineáris függvényei. Az eredmény tehát ugyanaz, mint kiegészítés előtt. A kiegészítésre azért van szükség, hogy a különböző elemekhez tartozó vektorok és mátrixok összeadhatók legyenek. Az egyes csomópontokra ható külső erők komponenseit az eddigi gyakorlatnak megfelelően egy vektorban foglalhatjuk össze:

$$\bar{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{x1} \\ \mathbf{f}_{y1} \\ \mathbf{f}_{x2} \\ \mathbf{f}_{y2} \\ \mathbf{f}_{x3} \\ \mathbf{f}_{y3} \end{bmatrix}$$

Az erők egyensúlya azt jelenti, hogy minden egyes csomópontban ható erők kiegyenlítik egymást, sőt azok x és y komponenseire külön-külön is igaz.



17. ábra: az 1. csomópont által az elemekre kifejtett erők (a), és az erők egyensúlya az 1. csomópontban (b).

Az 1. csomópontban az erők egyensúlya így írható:

$$\begin{split} & f_{x1} - f_{x1}^{(1)} - f_{x1}^{(2)} - f_{x1}^{(3)} = 0 \\ & f_{y1} - f_{y1}^{(1)} - f_{y1}^{(2)} - f_{y1}^{(3)} = 0 \end{split}$$

He az 1. csomópont az (1) elemre $\overline{f}_{x1}^{(1)}$ erővel hat (x komponens), akkor a hatás-ellenhatás elve szerint az (1) elem az 1. csomópontra $-\overline{f}_{x1}^{(1)}$ erőt fog kifejteni x irányban. A fenti egyenlőségek az 1. csomópontra ható erőket tartalmazzák, és az egyensúly feltételét fogalmazzák meg. Természetesen az $\overline{f}_{x1}^{(3)}$ és a $\overline{f}_{y1}^{(3)}$ nullák. Minden csomópontra felírva a hasonló egyenleteket hat egyenlethez jutunk, amelyeket vektori alakban így írhatunk:

$$\overline{f} - \overline{f}^{(1)} - \overline{f}^{(2)} - \overline{f}^{(3)} = 0$$

Vagy

$$f = f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(3)}$$

(Ezek azok az összefüggések, amelyek miatt korábban ki kellett egészítenünk a vektrorokat, és a soron következők:) Helyettesítsük be az $\overline{f}^{(i)} = \underline{\underline{K}}^{(i)} \cdot \overline{u}$ összefüggéseket:

$$\overline{\mathbf{f}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(1)} \cdot \overline{\mathbf{u}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(2)} \cdot \overline{\mathbf{u}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(3)} \cdot \overline{\mathbf{u}}$$

$$\overline{\mathbf{f}} = (\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(1)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(2)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(3)}) \cdot \overline{\mathbf{u}}$$

$$\overline{\mathbf{f}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \overline{\mathbf{u}}, \text{ ahol}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(1)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(2)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(3)}.$$

A rendszer K merevségi mátrixát az egyes elemek globális koordinátarendszerben felírt, megfelelő nullákkal feltöltött sorokkal és oszlopokkal kiegészített merevségi mátrixainak összegeként kaphatjuk meg. Ez az összefűzés.

Példa a globális merevségi mátrix kiszámítására

Az előző négy alfejezetben áttekintettük azokat a lépéseket, amelyek elvezetnek a globális merevségi mátrix kiszámításáig. Mielőtt tovább haladnánk, lássunk egy számszerű példát, amely illusztrálja az eddigieket. Háromtagú rácsos tartószerkezet idealizált modelljét vizsgáljuk. Minden egyes tag kör keresztmetszetű cső, amelynek falvastagsága 0,2 mm, belső sugarai r⁽¹⁾=3,7 mm, r⁽²⁾=1,8 mm, r⁽³⁾=10,6 mm, anyaguk acél, így $E^{(1)}=E^{(2)}=E^{(3)}=2,1\cdot10^{11}$ N/m² =2,1·10⁵MPa.



18. ábra: A tartó méretei és a globális koordináta rendszer

A rendelkezésünkre álló adatokból kiszámítjuk a lineáris rúdelemek rugóállandóit:

$$k^{(1)} = \frac{E^{(1)} \cdot A^{(1)}}{L^{(1)}} = 1000 \frac{N}{m}; k^{(2)} = 500 \frac{N}{m}; k^{(3)} = 200 \frac{N}{m}$$

(A keresztmetszetek természetesen az $A=R^2\pi-r^2\pi$ formulából kaphatók, ahol R a külső, r a belső sugár.) Az adatokat szándékosan úgy választottuk, hogy a rugóállandók kerek számok legyenek, és így a számítások menete könnyebben követhető legyen. Az egyes elemek merevségi mátrixai a lokális koordináta rendszerben

$$\underline{\underline{K}}^{(1)'} = 1000 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{N}{m}$$
$$\underline{\underline{K}}^{(2)'} = 500 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{N}{m}$$
$$\underline{\underline{K}}^{(3)'} = 200 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{N}{m}$$

Láthatjuk, amit már korábban is megállapítottunk, hogy a lokális rendszerben felírt merevségi mátrixok (kétcsomópontú lineáris rúdelem esetén) csupán egy szorzótényezőben térnek el egymástól. Munkánk következő fázisában áttérünk a lokális koordinátákról globális koordinátákra. Ehhez meg kell szerkesztenünk a T⁽¹⁾, T⁽²⁾, T⁽³⁾ transzformációs mátrixokat. A feladatul kitűzött rácsos tartó esetén az egyes végeselemeknek a globális x-tengellyel bezárt szögei rendre $\varphi^{(1)}=0^\circ$; $\varphi^{(2)}=90^\circ$; $\varphi^{(3)}=45^\circ$. Ebből

$$\underline{\mathbf{T}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\underline{\mathbf{T}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\underline{\mathbf{T}}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Vegyük észre, T⁽¹⁾ egységmátrix, ami összhangban áll azzal, hogy az (1) elem lokális koordinátarendszerének tengelyei párhuzamosak a globális koordinátarendszer tengelyeivel. Most végezzük el a transzformációt:

$$\underline{\underline{K}}^{(1)} = \underline{\underline{T}}^{(1)T} \cdot \underline{\underline{K}}^{(1)'} \cdot \underline{\underline{T}}^{(1)} = 1000 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{N}{m}$$
$$\underline{\underline{K}}^{(2)} = \underline{\underline{T}}^{(2)T} \cdot \underline{\underline{K}}^{(2)'} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)} = 500 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{N}{m}$$
$$\underline{\underline{K}}^{(3)'} = \underline{\underline{T}}^{(3)T} \cdot \underline{\underline{K}}^{(3)'} \cdot \underline{\underline{T}}^{(3)} = 200 \cdot \begin{bmatrix} 0, 5 & 0, 5 & -0, 5 & -0, 5 \\ 0, 5 & 0, 5 & -0, 5 & -0, 5 \\ -0, 5 & -0, 5 & 0, 5 & 0, 5 \\ -0, 5 & -0, 5 & 0, 5 & 0, 5 \end{bmatrix} \frac{N}{m}$$

Ahhoz, hogy összeadjuk a mátrixokat, ki kell egészítenünk azokat nulla sorokkal és oszlopokkal, amelyek a hiányzó indexeknek megfelelő helyre kerülnek:

Most elvégezhetjük az összeadás

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(1)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(2)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(3)} = \begin{vmatrix} 1100 & 100 & -1000 & 0 & -100 & -100 \\ 100 & 100 & 0 & 0 & -100 & -100 \\ -1000 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 500 & 0 & -500 \\ -100 & -100 & 0 & 0 & 100 & 100 \\ -100 & -100 & 0 & -500 & 100 & 600 \end{vmatrix}$$

A $\underline{\underline{K}}$ globális merevségi mátrix szimmetrikus. A könnyebb átláthatóság kedvéért kiemelünk 100-at, és így írjuk:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = 100 \cdot \begin{bmatrix} 11 & 1 & -10 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{m}}$$

Peremfeltételek

A globális merevségi mátrix kiszámításához konkrét alakot öltött a

$$\underline{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

egyenlet. A feladat azonban nem csupán a tartó elemeit adja meg, hanem a befogásokat is,

amelyeket kinematikai peremfeltételeknek nevezünk, mert az ismeretlen u elmozdulásvektorra vonatkozó előírásokat jelentenek. A befalazás és a görgős alátámasztás azt jelenti, hogy az 1. csomópont nem mozdulhat el, a 2. csomópont pedig csak x irányba mozoghat, y irányba nem. Ezt szemlélteti az alábbi ábra:



A kinematikai peremfeltételek figyelembevételével az \overline{u} globális elmozdulás vektort az alábbi alakban keressük:

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_{x2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_{x3} \\ \mathbf{u}_{y3} \end{bmatrix}$$

A befogáson kívül a feladat megadja a 3. csomópontban ható külső erőket is:

$$f_{x3} = 2 N$$

 $f_{y3} = 1 N$

valamint tudjuk, hogy a görgős alátámasztás x irányú erőt nem képes kifejteni, azaz $f_{x2} = 0 \ N \ .$

Ezt is szemléltethetjük az ábrán:



A külső erők vektora az alábbi alakú:

$$\bar{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{x1} \\ \mathbf{f}_{y1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{y2} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Mivel a \underline{K} globális merevségi mátrix szinguláris, a $\underline{K} \cdot \overline{u} = \overline{f}$ egyenlet nem oldható meg peremfeltételek megadása nélkül! (Ez azt jelenti, hogy a sorai nem lineárisan függetlenek, vagyis a rangja kisebb, mint a sorainak a száma.) Az ilyen típusú feladatok kézzel való megoldására általánosan ismert a következő eljárás. Töröljük a globális merevségi mátrixból azokat a sorokat és oszlopokat, amelyek a kinematikai peremfeltételben adott elmozdulás komponenseknek felelnek meg. Így már a \underline{K} nem lesz szinguláris, és az egyenlet megoldható. Ezt látjuk a következő alfejezetben.

A feladat megoldása

A peremfeltételek figyelembevételével a feladatot leíró egyenlet így írható:

$$100 \cdot \begin{bmatrix} 11 & 1 & -10 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x1} \\ 0 \\ u_{x2} \\ 0 \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ 0 \\ f_{y2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mind a mátrixból, mind a vektorokból elhagyjuk x1, y1 és y2 sorokat és oszlopokat.

$$100 \cdot \begin{bmatrix} 11 & 1 & -10 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{x2} \\ 0 \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ 0 \\ u_{x2} \\ 0 \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix}$$

Ez a redukált egyenlet, amit megoldhatunk több módszerrel (pl. Gauss-eliminációval), de itt a legelemibb megoldást közöljük, amely kisszámú ismeretlen esetén használható csak. A mátrix szorzás szabályai szerint elvégezve a kijelölt műveleteket, és a vektorokat komponensenként felírva a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$100 \times 10 \ u_{x2} = 0$$

$$100 \cdot (u_{x3} + u_{x3}) = 2$$

$$100 \cdot (u_{y3} + 6u_{y3}) = 1$$

Ebből a megoldás:

 $u_{x2} = 0 m$ $u_{x3} = 0,022 m$ $u_{y3} = -0,002 m$

Ez az eredmény könnyen értelmezhető: megkaptuk azokat az elmozdulásokat, amelyeket a befogás nem tilt meg. Itt jegyezzük meg, hogy a kapott elmozdulás értékek szokatlanul nagyok. Ennek oka az, hogy a tartószerkezet igen vékony falú csövekből áll (0,2 mm az alufólia vastagsága), de mivel a valóságban az sem ideálisan rugalmas, ilyen nagy megnyúlások esetén elszakad. Azonban az adatok megválasztásakor most a kis számok használata és a számítások követhetősége volt az elsődleges cél.

A csomópontok elmozdulásai tehát:

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,022 \\ -0,002 \end{bmatrix} m$$

A külső és belső erők kiszámítása

Ha az u elmozdulás vektor ismert, akkor a merevségi mátrix segítségével minden erőt ki tudunk számolni:

Ezzel megkaptuk a befogásokban ébredő, ún. reakcióerőket. Vegyük észre, hogy az előírt erőkomponensek automatikusan adódtak.



19. ábra: A rácsos tartóra ható előre megadott terhelés (f_{x3}; f_{y3}) és a kiszámított reakcióerők

Az egyes rudak igénybevétele szintén fontos kérdés egy tartószerkezet vizsgálatakor (méretezéskor), ezért kiszámítjuk az egyes elemekre ható erőket. Ehhez az elemek merevségi mátrixát használjuk fel (globális koordináta rendszerben):