

Kinematika és dinamika előadásjegyzetek

gépészmérnök és közlekedésmérnök
hallgatók számára

DEZSŐ GERGELY

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Kinematika és dinamika előadásjegyzetek
gépészmérnök és közlekedésmérnök hallgatók számára

szerző: Dr. Dezső Gergely
lektorálta: Dr. Varga Klára

diák lektorok: Emhő Dávid, Fehér Ottó, Galambos Marcell, Jászai Richárd,
Kovács Gábor, Kövesdi Zsolt, Labbanc Tamás, Márton Balázs, Nagy Attila,
Pongó Alexandra, Varró Dóra, Vaskó Tamás

ISBN: 978-615-5545-76-4
Nyíregyházi Egyetem
Műszaki és Agrártudományi Intézet
Műszaki Alapozó, Fizika és Gépgyártástechnológia Tanszék
2018

Készült az alábbi pályázati projekt támogatásával:
EFOP-3.5.1-16-2017-00017 „NYE-DUÁL- Új utakon a duális felsőoktatással
a Nyíregyházi Egyetemen, az Északkelet-Magyarországi térség felemelkedé-
séért”



Copyright: dr. Dezső Gergely
Creative Commons felhasználási feltételek:



(Nevezd meg a szerzőt! Ne add el! Ne változtasd!)

A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon másolható, terjeszthető, megjelentethető és előadható, de nem módosítható.

Tartalomjegyzék

1. A tömegpont kinematikája	3
1.1. A tömegpont fogalma	3
1.2. A tömegpont helyének megadása	3
1.3. Pálya, út, elmozdulás	5
1.4. Sebesség és gyorsulás	8
1.5. A mozgástörvény ívhosszparaméteres alakja	9
1.6. Foronómiai függvények	12
1.7. A kinematikai mennyiségek kapcsolata a pálya geometriai elemeivel	12
1.8. Vetületi mozgások	13
1.9. Egyenes vonalú egyenletes mozgás	15
1.10. Az állandó gyorsulású mozgás	17
1.11. A körmozgás	21
1.11.1. Az egyenletes körmozgás	24
1.11.2. Az egyenletesen változó körmozgás	26
1.12. A harmonikus rezgőmozgás	27
1.13. Számítási példák (tömegpont kinematikája)	32
2. A tömegpont dinamikája	37
2.1. A tehetetlenség törvénye	38
2.2. A mozgásmennyiség	40
2.3. A dinamika alapegyenlete	41
2.4. A hatás-ellenhatás elve	43
2.5. A szuperpozíció elve	44
2.6. A tömegpont mozgásegyenlete	45
2.7. Erőtörvények	46
2.8. Munka, teljesítmény	47
2.9. Az energia	48
2.10. A mozgási energia	49
2.11. A helyzeti energia, konzervatív erőterek	50
2.12. Példák potenciálra	52

2.13. A munkatétel	52
2.14. Számítási példák (tömegpont dinamikája)	54
3. Relatív mozgások	57
3.1. Állandó sebességű relatív mozgások	58
3.2. A Galilei-féle relativitási elv	61
3.3. Állandó relatív gyorsulású mozgások	62
3.4. Általános relatív mozgás	64
3.5. A forgó egységvektor	67
3.6. Vektor időderiváltja forgó rendszerben	69
3.7. Kinematika általánosan mozgó rendszerekben	70
3.8. Dinamika általánosan mozgó rendszerekben	72
3.9. Inerciarendszerek relatív mozgása	73
3.10. Számítási példák (relatív mozgás)	74
4. Pontrendszerek dinamikája	75
4.1. A pontrendszer	75
4.2. Statikai nyomaték, tömegközéppont	76
4.3. Tömegközéppont és súlypont	80
4.4. A pontrendszerre ható erők csoportosítása	81
4.5. Pontrendszer impulzusa	82
4.6. Impulzustétel, tömegközéppont tétele	83
4.7. Az impulzusnyomaték	84
5. A merev test kinematikája	87
5.1. A merev test fogalma	87
5.2. Relatív hely-, sebesség-, gyorsulásvektorok	89
5.3. A merev test szabadsági foka	91
5.3.1. Kiegészítés: a merev test szabadsági fokáról	92
5.4. A merev test térbeli helyzetének megadása	93
5.5. A merev test sebességállapota	94
5.6. A centrális egyenes	98
5.7. A pillanatnyi sebességállapotok osztályozása	102
5.8. A merev test gyorsulásállapota	105
5.9. Számítási példák (merev test kinematikája)	108
6. A merev test dinamikája	111
6.1. A merev test tömegeloszlása, tömege	111
6.2. Statikai nyomaték, tömegközéppont	112
6.3. A tömegközéppont és a szimmetria	116
6.4. Az impulzus	120

6.5. A tömegelem impulzusnyomatéka	122
6.6. A merev kontinuum impulzusnyomatéka	122
6.7. A tehetetlenségi tenzor mátrixa	126
6.8. A tehetetlenségi nyomaték	128
6.9. A tehetetlenségi nyomatékok összeadhatósága	130
6.10. Steiner tétele	131
6.11. A merev test mozgásegyenletei	134
6.12. A merev test statikája	139
6.13. A merev test mozgási energiája	139
6.14. A rögzített tengely körül forgó merev test	141
6.15. Számítási példák (a merev test dinamikája)	147
7. Függelékek	155
7.1. Koordináta-rendszerek	155
7.1.1. A síkbeli derékszögű koordináta-rendszer	155
7.1.2. A térbeli derékszögű koordináta-rendszer	157
7.1.3. A síkbeli polár koordináta-rendszer	159
7.1.4. A hengerkoordináta-rendszer	162
7.1.5. Más koordináta-rendszerek	163
7.2. A térgörbék leírásának differenciálgeometriai megközelítése . .	163
7.2.1. A térgörbe	163
7.2.2. Az ívhosszparaméter és a természetes paraméterezés . .	165
7.3. Matematikai összefüggések vegyesen	171
7.4. A görög betűk	175
7.5. Jelölések és összefüggések a vektorszámításból	175
7.5.1. A Kronecker-delta szimbólum	175
7.5.2. A vektori szorzat	175
7.5.3. A vegyes szorzat	176
7.5.4. Vektorok kétszeres vektoriális szorzata	177
7.5.5. Négyzetes mátrix és vektor szorzata	178
7.6. Sajátérték, sajátvektor	178
Tárgymutató	183
A definíciók listája	189
A tételek listája	192
Felhasznált és ajánlott irodalom	193

Előszó

Ez a jegyzet a Nyíregyházi Egyetem Műszaki és Agrártudományi Intézetében tanuló gépészmérnök, mezőgazdasági gépészmérnök és közlekedésmérnök BSc szakos hallgatók számára készült.

Témája a mozgástan. Az anyag kiválasztása nem volt könnyű feladat. A jegyzetnek ugyanis egyszerre kell megfelelnie egy folyamatosan változó felsőoktatási rendszer, valamint a pedagógia örök követelményeinek. Ez utóbbiak megkövetelik, hogy a pedagógus mérje fel, hogy honnan indul a tanuló, és hova kívánja őt eljuttatni. E két pillér közé kell hidat építeni. A mozgástant tanuló alapképzési szakos egyetemi hallgatók már nem első félévesek, mégis, az egyetemen eltöltött korábbi félévek során megtanultak mögött is érződik a tanulócsoport inhomogenitása a középiskolából hozott tudásanyag szempontjából. Ha a felsőoktatásban tanító pedagógus megfedkezik a hiányosságok kompenzálásáról, akkor nem csak a diákok dolgát nehezíti meg, hanem a sajátját is. Ennek a jegyzetnek a törzsanyagában és a függelékében is található olyan háttérismeretek, magyarázatok, amelyek a jobban felkészült tanulók számára feleslegesnek tűnhetnek, másoknak viszont elengedhetetlenül szükségesek a tananyag megértése szempontjából.

A jegyzet anyagát le lehetett volna írni rövidebben, tömörebben is. A szerző reméli, hogy a magyarázatok nem csak a megértést segítik majd, hanem a kifejtett tananyag továbbgondolására is inspirálnak némelyeket. A mechanika a természettudományos gondolkodás iskolája. A műszaki és a természettudományos oktatás alapozó szakaszában nem szabad, nem kelle-e ezzel takarékoskodni. A jegyzet tartalmaz olyan anyagrészeket, amelyek előadására a jelenlegi órakeretek között nem jut idő. Mégsem maradtak ki ezek, mert akkor kevésbé lehetne átlátni e szép tudományterület alapvető elemeinek összefüggéseit, az egyes részek szükségességét és helyét a többihez viszonyítva.

Már korábban megjelent egy példatár, amely e jegyzet anyagához kapcsolódó mintafeladatokat és megoldandó feladatokat tartalmaz. Részben ezért, részben terjedelmi okokból, részben pedig a jegyzet célja miatt itt nem volt elsődleges szempont sok számítási példa bemutatása. Ez azonban nem je-

lenti azt, hogy ne lenne fontos a gyakorlás. A szerző meggyőződése, hogy a mechanikát gyakorló feladatok megoldása nélkül nem lehet kellő mélységben elsajátítani. A kitartó gyakorlás következménye a siker, amely magával hozza a szaktudást, az örömet, motivációt a továbbfejlődésre, és nem utolsósorban az általában vett természettudományos és műszaki tudás erős alapjait, melyeknek elérése e tantárgy tanulásának elsődleges célja.

A jegyzet elektronikus formában áll rendelkezésre.

A szövegen belüli kereszthivatkozásokat sötétbarna szín jelzi.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm a Nyíregyházi Egyetem Műszaki Alapozó, Fizika és Gépgyártástechnológiai Tanszékén dolgozó közvetlen munkatársaimnak a baráti légkört, szakmai megbeszéléseket, tapasztalatok megosztását, amelyek nagyban elősegítették a jegyzet anyagának megfelelő írásba foglalását.

Köszönöm a jegyzet szaklektorának, dr. Varga Klárának lelkiismeretes és alapos munkáját, értékes megjegyzéseit.

Köszönöm diák lektoraim lelkes tevékenységét. Érdeklődésük jelentős inspirációt adott számomra a jegyzet készítése során.

Köszönöm feleségemnek és gyermekeimnek az irántam tanúsított türelmet és támogatást, amit e tananyag összeállításának ideje alatt kaptam tőlük.

Hálás vagyok Istennek, aki időt, erőt és örömet adott ahhoz, hogy e munkát elvégezzem.

" A titkok az ÚRéi, a mi Istenünkéi, a kinyilatkoztatott dolgok pedig a mieink és a fiainkéi mindörökké ..." (5Móz 29,28.)

a szerző

1.

A tömegpont kinematikája

1.1. A tömegpont fogalma

1.1.1. Definíció (Tömegpont) A tömegpont egy olyan idealizált test, amelynek kiterjedése nincs, tömege van.

A tömegpont más nevei: anyagi pont, pontszerű test, részecske. A valóságban a tömegpont nem létezik, mégis igen nagy haszonnal alkalmazható olyan jelenségek modellezése során, amelyekben a testek, vagy bizonyos testek kiterjedése a feladat méreteihez képest igen kicsi.

Például az égitestek mechanikájában, a bolygók tömegpontnak tekinthetők pályáik kiszámításakor, mert a naprendszer méreteihez viszonyítva a nagyságuk elenyésző. Azonban, ha ugyanezeknek a bolygóknak a forgómozgását vizsgáljuk, akkor már nem tekinthetjük azokat tömegpontoknak.

A tömegpont nem tévesztendő össze a később, a kiterjedt testek mechanikájának tárgyalása során szóba kerülő tömegelemmel. A tömegelem kiterjedése "differenciálisan kicsi", a tömegponté viszont pontosan nulla. Hiba azt mondani, hogy a tömegpont "elhanyagolható méretű", vagy "nagyon kicsi". A pontos megfogalmazás az, hogy a tömegpont méret nélküli *idealizált test*, amelyet a kicsiny méretű testek *modelljeként* használunk az elméleti gondolkodásban és a számítások során.

Mivel a tömegpontnak nincs kiterjedése, forgómozgást nem tulajdonítunk annak.

1.2. A tömegpont helyének megadása

A tömegpont helyét a háromdimenziós térben mindig valamilyen más, előre kiválasztott testhez viszonyítva adjuk meg.

1.2.1. Definíció (vonatkoztatási rendszer) Vonatkoztatási rendszernek nevezzük azt a testet, amelyhez viszonyítva más testek térbeli helyzetét megadjuk.

A vonatkoztatási rendszer általában egy valóságos test (pl. asztal, szoba sarka, gép állványa), ritkábban képzeletbeli test, vagy a tér egy "üres" pontja is lehet (pl. egy cső geometriai középpontja). A vonatkoztatási rendszer mozoghat, akár gyorsuló mozgást is végezhet, bár ekkor a tömegpont helyének megadása bonyolultabb lehet. Ilyen vonatkoztatási rendszert csak akkor választunk, ha az előbb említett hátránnyal együtt ez valamilyen okból nyilvánvaló előnyt jelent egy feladat megoldásában. A vonatkoztatási rendszer megválasztása tetszőleges, célszerű úgy eljárni, hogy a későbbi számítások minél egyszerűbbek legyenek.

A tömegpont helyének *számszerű* megadására koordináta-rendszereket használunk. A koordináta-rendszer az emberi képzelet szüleménye, célja a jelenségek számszerű leírásának lehetővé tétele. A koordináta-rendszert a vonatkoztatási rendszerhez rögzítjük képzeletben. A koordináta-rendszer típusát a feladatnak megfelelően választjuk meg úgy, hogy minél egyszerűbb legyen annak matematikai megfogalmazása. A koordináta-rendszer választásában tehát szintén szabadságunk van. Egy feladaton belül csak akkor változtatjuk meg a koordináta-rendszert, ha nagyon muszáj, mert ez többlet matematikai munkával jár.

A leggyakrabban használt koordináta-rendszerekről a függelékben található áttekintés.

1.2.2. Definíció (A tömegpont helye) A tömegpont helyét a helyvektora adja meg.

1.2.3. Definíció (Helyvektor) A helyvektor a koordináta-rendszer kezdőpontjából a tömegponthoz mutató irányított szakasz.

Ebből következik, hogy egy tömegpont helyvektorának koordinátái függenek attól, hogy milyen típusú koordináta-rendszert alkalmazunk, és attól is, hogyan választjuk meg a koordináta-rendszer kezdőpontját és térbeli helyzetét.

1.3. A tömegpont mozgástörvénye, pálya, út, elmozdulás

1.3.1. Definíció (Mozgástörvény) A tömegpont mozgástörvénye a helyvektorának időfüggvénye, jele $\vec{r}(t)$. A mozgástörvénynek is van mértékegysége, amely a hosszúság egységeivel egyezhet meg.

A mozgástörvény egy olyan skalár-vektor függvény, amely minden időpillanathoz hozzárendel egy helyvektort. Ezzel egy térgörbét ír le. Ezért azt mondjuk, hogy a mozgástörvény a pálya időparaméteres alakja.

1.3.1. Tétel (A mozgástörvény általános alakja) A háromdimenziós térben mozgó tömegpont mozgástörvénye mindig megadható az alábbi alakban:

$$\vec{r}(t) = \vec{c}_0 + f_1(t)\vec{c}_1 + f_2(t)\vec{c}_2 + f_3(t)\vec{c}_3, \quad (1.1)$$

ahol $\vec{c}_0, \vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ konstans vektorok, $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ lineárisan függetlenek és $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ az idő skalárértékű függvényei.

A tételt itt nem szükséges bizonyítani, mert nyilvánvaló matematikai állítás. Itt inkább magyarázó megjegyzést fűzünk hozzá. Írjuk az 1.1. összefüggést az alábbi alakba:

$$\vec{r}(t) - \vec{c}_0 = f_1(t)\vec{c}_1 + f_2(t)\vec{c}_2 + f_3(t)\vec{c}_3, \quad (1.2)$$

Egy bizonyos t időpillanatban az $\vec{r}(t) - \vec{c}_0$ egy tetszőleges vektor, amit három másik vektor segítségével fejezünk ki úgy, hogy mindegyiket megszorozzuk egy-egy számmal (az $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ skalárfüggvények t pillanatbeli értékeivel), majd összeadjuk azokat (lineáris kombináció). Annak feltétele, hogy ez lehetséges legyen az, hogy a $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ vektorok lineárisan függetlenek legyenek. Ez azt jelenti, hogy \vec{c}_2 nem párhuzamos a \vec{c}_1 vektorral, és \vec{c}_3 nem esik az előző kettő által meghatározott síkba.

Úgy is gondolhatnánk egy pillanatra, hogy a $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ vektorhármass egy nem derékszögű koordináta-rendszer nem egységnyi hosszú bázisvektorai, a \vec{c}_0 pedig ennek kezdőpontjába mutató helyvektor egy másik térbeli derékszögű koordináta-rendszerben.

Ha a mozgástörvény

$$\vec{r}(t) = \vec{c}_0 + f_1(t)\vec{c}_1 + f_2(t)\vec{c}_2 \quad (1.3)$$

alakban megadható, akkor a mozgás síkmozgás, amely a \vec{c}_0 helyvektorú ponton áthaladó, \vec{c}_1, \vec{c}_2 vektorok által kifeszített síkkal párhuzamos síkban zajlik.

Ha a mozgástörvény

$$\vec{r}(t) = \vec{c}_0 + f_1(t)\vec{c}_1 \quad (1.4)$$

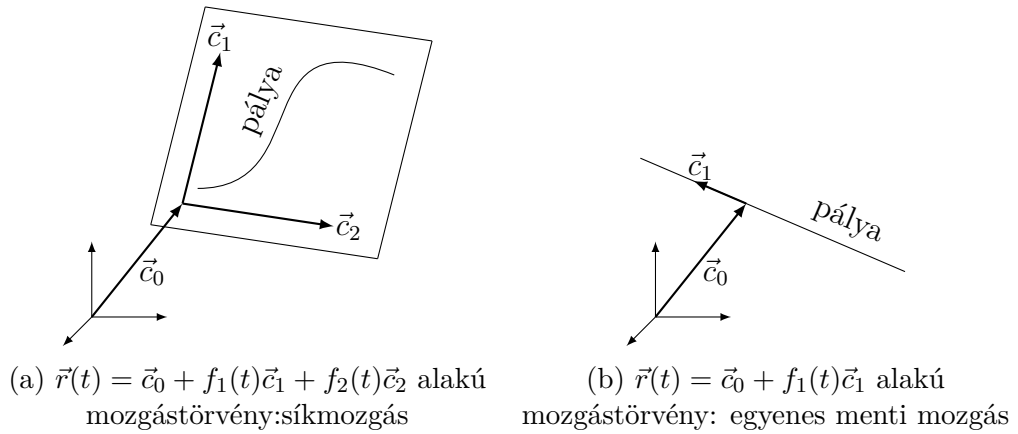
alakban megadható, akkor a mozgás egyenes vonalú mozgás, amely a \vec{c}_0 helyvektorú ponton áthaladó, \vec{c}_1 irányvektorú egyenes mentén zajlik. Itt fontos hangsúlyozni, hogy a 1.4. alakú mozgástörvény egyenes mentén zajló mozgást ír le, de *nem* feltétlenül egyenletes mozgást. Az egyenes mentén a tömegpont tetszőleges módon vándorolhat. Példák erre az egyenes mentén történő harmonikus rezgőmozgás, a függőlegesen pattogtatott labda, az egyenes sínen menetrend szerint meg-megálló, majd változó sebességgel közlekedő villamos kocsiszekrényének egy pontja, az egyenes henger belsejében megvezetett dugattyú.

Az 1.4. alakú mozgástörvény speciális esete az egyenes vonalú egyenletes mozgás, amikor is $f_1(t) = t$, a mozgástörvény $\vec{r}(t) = \vec{c}_0 + t\vec{c}_1$, és csakis ebben az esetben a \vec{c}_1 vektor a sebességvektornak felel meg.

Ha a mozgástörvény

$$\vec{r}(t) = \vec{c}_0 \quad (1.5)$$

alakban megadható, akkor a tömegpont nem mozog.



1.1. ábra. A mozgástörvény speciális alakjai

1.3.2. Definíció (Pálya) Pályának nevezzük azt a térgörbét, amelyet a tömegpont a mozgása során befut.

A pályát nem csak a mozgástörvény, hanem a vizsgált időintervallum is meghatározza. Például az egyenes vonalú egyenletes mozgás pályája véges időintervallum esetén véges egyenes szakasz, végtelen időintervallum esetén félegyenes. A pálya a háromdimenziós térben egy ponthalmaz ("alakzat"),

a geometriából ismert elnevezésekkel azonosítjuk, pl. kör, körív, parabola, egyenes szakasz, félegyenes stb. A pálya nem mindig egyszerű alakzat, lehet olyan összetett ponthalmaz is, amelynek nincs külön neve.

1.3.3. Definíció (Út) Útnak nevezzük a mozgás során befutott pályadarabok hosszainak összegét. Az út jele: s , mértékegységei a hosszúság egységei.

A definíció megfogalmazása mögött az a gondolat áll, hogy a tömegpont a pálya bizonyos részeit többször is befuthatja, ezeket annyiszor kell beszámítani, ahányszor végighalad azokon a tömegpont. Például periódikus mozgások (körmozgás, harmonikus rezgőmozgás) vizsgálata során szükség lehet erre, de kevésbé szabályos mozgások esetén is (pl. faág végpontjának mozgása szeles időben).

Az út skalármennyiség. Az út mérését az idő mérésével együtt kezdjük, ezért egy bizonyos időintervallumban a kezdő időpillanatban a megtett út értéke mindig nulla. Az út mértékszámát nemnegatív, mert a megtett út akkor is növekszik, ha a tömegpont mozgása a pálya mentén irányt vált.

1.3.4. Definíció (Elmozdulás) Elmozdulásnak nevezzük a mozgás kezdőpontjából a végpontjába mutató vektort, jele: $\Delta\vec{r}_{AB}$, ahol A a mozgás kezdőpontja, B a végpontja. Az elmozdulás vektormennyiség, mértékegysége a hosszúság egységeivel egyezhetnek meg.

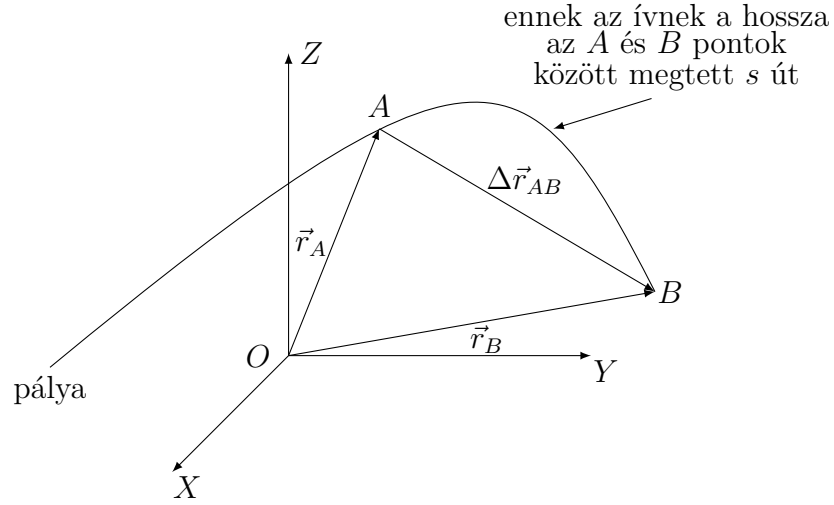
A definícióból nyilvánvaló, hogy

$$\Delta\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A. \quad (1.6)$$

A mozgás során kiválaszthatunk két tetszőleges időpillanathoz tartozó helyvektort, amelyek közül a korábbi pillanathoz tartozik az A pont, a későbbihez a B . Mivel vektormennyiség, az elmozdulásnak nagysága és *iránya is* van.

Az elmozdulás vektor hossza ($|\Delta\vec{r}_{AB}|$) nem egyezik meg a megtett úttal, hanem az A és B pontok pillanatnyi távolságát adja meg. Egy mozgás során előfordulhat, hogy a megtett út nem nulla, de az elmozdulás vektor nullvektor, és ezzel együtt a hossza is nulla. A periódikus mozgások szolgáltatnak erre számos példát. Ilyen például egy gyalugép szerszámának a mozgása, az ingamozgás, az egyenletes körmozgás, vagy a harmonikus rezgőmozgás.

A 1.2. ábra szemlélteti a fejezet fogalmait.



1.2. ábra. A mozgástörvénnyel kapcsolatos fogalmak szemléltetése

1.4. Sebesség és gyorsulás

1.4.1. Definíció (A tömegpont sebessége) A tömegpont \vec{v} sebessége a mozgástörvény idő szerinti differenciálhányadosa

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}. \quad (1.7)$$

1.4.2. Definíció (A tömegpont gyorsulása) A tömegpont \vec{a} gyorsulása a sebesség idő szerinti differenciálhányadosa

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}. \quad (1.8)$$

A sebesség és a gyorsulás az idő függvényei $\vec{v} = \vec{v}(t)$, $\vec{a} = \vec{a}(t)$. A 1.4.1. és 1.4.2. definíciókból következik, hogy a sebesség-idő függvény a gyorsulás-idő függvényből integrálással kapható meg:

$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^t \vec{a}(\tau) d\tau + \vec{v}_0, \quad (1.9)$$

ahol t_0 az időmérés kezdetének időpontja, \vec{v}_0 pedig a sebességvektor a t_0 időpillanatban. A \vec{v}_0 matematikai szempontból integrációs állandó, ugyanakkor fontos fizikai jelentése van, ez a kezdősebesség. A 1.9. feladat akkor és csak

akkor oldható meg egyértelműen, ha a \vec{v}_0 ismert. Az ilyen típusú feladatokat a matematikában kezdeti érték feladatoknak nevezik. A kezdeti érték feladatok egyértelmű megoldásához szükség van a kezdeti érték(ek)re. A műszaki és természettudományokban gyakran találkozunk kezdeti érték feladatokkal. A mozgástörvény a sebesség-idő függvényből szintén integrálással kapható meg:

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \vec{v}(\tau) d\tau + \vec{r}_0, \quad (1.10)$$

ahol \vec{r}_0 egy integrációs állandó, fizikai jelentése: a t_0 időpillanatbeli helyvektor. Ez is egy kezdeti érték feladat, ahol a kezdeti érték az \vec{r}_0 kiindulási helyvektor. Ha egy mozgásnak csak az $\vec{a}(t)$ gyorsulás-idő függvénye ismert, akkor az 1.9. és 1.10. összefüggések felhasználásával kétszeri integrálással megkapható a mozgástörvény, ha \vec{v}_0 és \vec{r}_0 adottak. Fontos speciális eset az *állandó gyorsulású mozgás*. Ekkor $\vec{a}(t) = \vec{a}$ állandó vektor, így

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{a}}{2} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0. \quad (1.11)$$

1.5. A mozgástörvény ívhosszparaméteres alakja

Ebben a fejezetben felhasználjuk a differenciálgeometria néhány eredményét. Az ide vonatkozó matematikai összefüggésekről részletesebben lehet olvasni a függelék megfelelő 7.2. fejezetében.

Az $\vec{r}(t)$ mozgástörvény minden t pillanathoz hozzárendel egy \vec{r} helyvektort, így megad a térben egy ponthalmazt, ami nem más, mint a tömegpont mozgásának pályája. Ezért azt mondjuk, hogy a mozgástörvény a pályának egy matematikai leírását adja. A mozgástörvény a pálya (idő)paraméteres alakja. Az $s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{\vec{r}}^2(\tau)} d\tau$ ívhosszparaméter bevezetésével, feltéve, hogy az $s(t)$ függvény invertálható, a mozgástörvényből kiküszöbölhető az idő, így előáll a pálya $\vec{r}(s)$ ívhosszparaméteres alakja (ld. bővebben 7.51., 165 oldal). Ennek ívhosszparaméter szerinti deriváltjai fontos geometriai fogalmakkal állnak kapcsolatban.

1.5.1. Definíció (Érintő irányú egységvektor) Egy $\vec{r}(s)$ térgörbe érintő irányú egységvektora:

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}. \quad (1.12)$$

1.5.2. Definíció (Főnormális egységvektor) Egy $\vec{r}(s)$ térgörbe főnormális egységvektora:

$$\vec{n} = R \frac{d\vec{t}}{ds}, \quad (1.13)$$

ahol R a térgörbe görbületi sugara a vizsgált pontban.

1.5.3. Definíció (Binormális egységvektor) Egy $\vec{r}(s)$ térgörbe binormális egységvektora:

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}. \quad (1.14)$$

1.5.4. Definíció (Kísérő triéder) Egy $\vec{r}(s)$ térgörbe kísérő triéderének nevezzük a $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ vektorhármast.

Egy térgörbe minden egyes pontjához más-más irányítású kísérő triéder tartozhat. A kísérő triéder a definícióban megadott sorrendben jobbsodrású ortonormált rendszert alkot, mert érvényesek az alábbi összefüggések:

$$|\vec{t}| = 1, \quad |\vec{n}| = 1, \quad |\vec{b}| = 1, \quad (1.15)$$

$$\vec{t} \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{t} = 0. \quad (1.16)$$

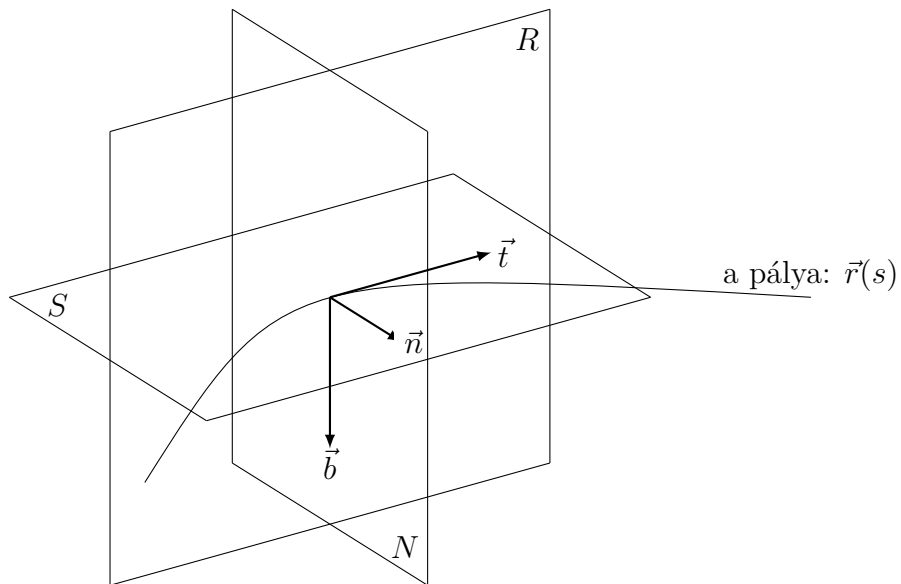
1.5.5. Definíció (Nevezetes síkok) A kísérő triéder két-két vektora által meghatározott síkokat rendre így nevezzük:

a \vec{t} és \vec{n} által meghatározott sík a *simulósík*,

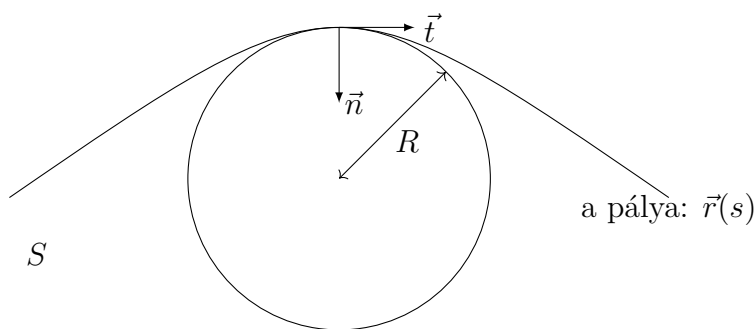
a \vec{t} és \vec{b} által meghatározott sík a *rektifikáló sík*,

a \vec{n} és \vec{b} által meghatározott sík a *normálsík*.

A simulósíkban fekszik a pálya adott pontjához illeszkedő simulókör . A simulókör sugara az R görbületi sugár . A főnormális egységvektor a simulókör középpontja felé mutat (1.4. ábra).



1.3. ábra. A kísérő triéder, simuló sík (S), rektifikáló sík (R), normálsík (N)



1.4. ábra. A simulósík (S) és a simulókör

1.6. Foronómiai függvények

Az s ívhosszparamétert, mint az idő $s(t)$ függvényét a műszaki szakirodalomban nevezik út-idő függvénynek, ívkoordinátának, skaláris mozgástörvénynek, mozgásfüggvénynek, a pálya befutási törvényének és "menetábrának" is.

1.6.1. Definíció (Pályasebesség) Az $s(t)$ ívhosszparaméter idő szerinti első differenciálhányadosát pályasebességnek nevezzük, a jele v .

$$v = \dot{s} \quad (1.17)$$

1.6.2. Definíció (Pályagyorsulás) A tömegpont v pályasebességének idő szerinti differenciálhányadosát pályagyorsulásnak nevezzük, a jele a_t .

$$a_t = \dot{v} = \ddot{s} \quad (1.18)$$

1.6.3. Definíció (Foronómiai függvények) Az $s(t)$ ívhosszparamétert, a $v(t)$ pályasebességet és az $a_t(t)$ pályagyorsulást foronómiai függvényeknek nevezzük.

1.7. A kinematikai mennyiségek kapcsolata a pálya geometriai elemeivel

A tömegpont sebessége és gyorsulása kapcsolatba hozható a kísérő triéder vektoraival.

1.7.1. Tétel (A sebességvektor érintő irányú) A tömegpont sebességvektora a pálya érintőjével párhuzamos.

Bizonyítás.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \vec{t} \cdot v. \quad (1.19)$$

□

1.7.2. Tétel (A gyorsulásvektor a simulósíkban van) A tömegpont gyorsulása mindig felírható a pálya érintőjének és a pálya főnormálisának irányába mutató komponensek összegeként.

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t \vec{t} + a_n \vec{n}, \quad (1.20)$$

ahol \vec{a}_t az érintő irányú (tangenciális) gyorsulás komponens, \vec{a}_n a normális irányú gyorsulás komponens, az a_t neve érintő irányú (tangenciális) gyorsulás koordináta, a_n neve normális irányú gyorsulás koordináta.

Bizonyítás.

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{t} \cdot v)}{dt} = \frac{d\vec{t}}{dt}v + \frac{dv}{dt}\vec{t} = \frac{d\vec{t}}{ds} \frac{ds}{dt}v + \frac{dv}{dt}\vec{t} = \frac{1}{R} \vec{n} \cdot v \cdot v + a_t \vec{t} = \frac{v^2}{R} \vec{n} + a_t \vec{t}. \quad (1.21)$$

Bevezetjük az

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad (1.22)$$

jelölést, ezzel a tételben megadott alakba írható az összefüggés. \square

1.7.1. Definíció (Normális gyorsulás) Az $a_n = \frac{v^2}{R}$ mennyiség neve normális gyorsulás, vagy normális irányú gyorsulás koordináta.

Körmozgás esetén a normális gyorsulásnak centripetális gyorsulás a neve. A 1.7.2. tétel úgy is megfogalmazható, hogy a tömegpont gyorsulásvektora mindig a simulósíkba esik.

1.8. Vetületi mozgások

Előfordul, hogy ki kell számítanunk egy tömegpont mozgásának vetületét. Egy tömegpont mozgásának a vetülete alatt a pont pillanatnyi tartózkodási helyeinek valamilyen alakzatra, valamilyen vetítési módszerrel képzett vetületi pontjának mozgását értjük egy bizonyos időintervallumon belül. A mozgás vetítése abban tér el a geometriai alakzatok vetítésétől, hogy ez esetben, miként a mozgás, úgy a vetület is az idő függvénye. A mozgás vetítésekor tehát nem egy pontot, nem is egy görbét, hanem egy hely-idő függvényt vetítünk, és vetületként egy másik hely-idő függvényt kell megadni.

A tömegpont mozgástörvényének egyenesre és síkra történő merőleges vetítésével foglalkozunk.

Szemléletesen azt mondhatjuk, hogy a tömegpont egyenesre vagy síkra vetett "árnyékának" a mozgástörvényét kívánjuk megadni, ha a megvilágítás

merőleges azokra.

Egy egyenes egyenlete

$$\vec{e} \times \vec{r} + \vec{c} = \vec{0}, \quad (1.23)$$

ahol \vec{e} egységvektor az egyenes irányvektora, \vec{c} a koordináta-rendszer origójából az egyenesre állított merőleges vektor (az egyenesnek az origóhoz legközelebb lévő pontjának helyvektora). Ugyanennek az egyenesnek a paraméteres alakja:

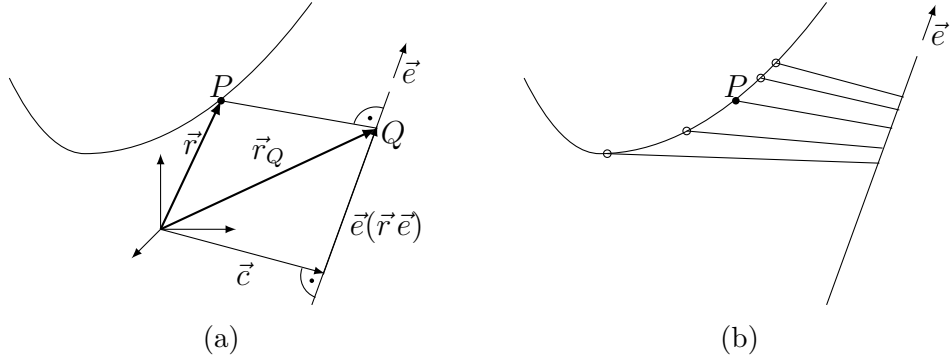
$$\vec{r}(\lambda) = \vec{c} + \lambda \vec{e} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.24)$$

Jelölje P a tömegpontot, amelynek mozgását vizsgáljuk, mozgástörvénye \vec{r} . A P helyvektorának az egyenesre vett vetülete megegyezik az egyenes irányába eső komponensével. Egy tetszőleges \vec{u} vektornak valamely \vec{e} egységvektorral megadott irányra vett vetülete az $\vec{u} \vec{e}$ skaláris szorzat. Legyen a vetületi pont jele Q , annak helyvektora \vec{r}_Q . A vetületi mozgást az $\vec{r}_Q(t)$ függvény adja meg, ez nem más, mint a képzeletbeli vetületi pont mozgástörvénye. Ebből a tömegpont mozgásának egyenesre vett vetületének mozgástörvénye, sebessége és gyorsulása:

$$\vec{r}_Q = \vec{e}(\vec{r} \vec{e}) + \vec{c}, \quad (1.25)$$

$$\dot{\vec{r}}_Q = \vec{v}_Q = \vec{e}(\dot{\vec{r}} \vec{e}) = \vec{e}(\vec{v} \vec{e}), \quad (1.26)$$

$$\ddot{\vec{r}}_Q = \vec{a}_Q = \vec{e}(\ddot{\vec{r}} \vec{e}) = \vec{e}(\vec{a} \vec{e}). \quad (1.27)$$



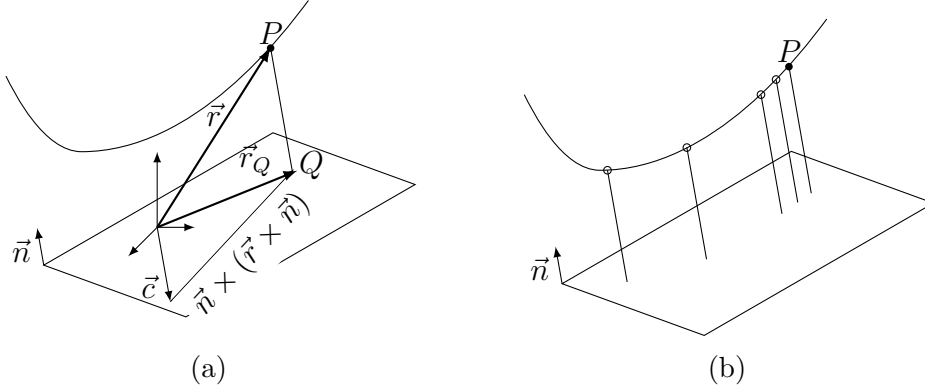
1.5. ábra. Tömegpont mozgásának merőleges vetítése egyenesre

Egy sík egyenlete:

$$\vec{r} \vec{n} + d = 0, \quad (1.28)$$

ahol \vec{n} a sík normálvektora, d a síknak az origótól való távolsága. A sík paraméteres alakja:

$$\vec{r}(\lambda, \mu) = \vec{c} + \lambda \vec{c}_1 + \mu \vec{c}_2 \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad (1.29)$$



1.6. ábra. Tömegpont mozgásának merőleges vetítése síkra

ahol \vec{c} a sík origóhoz legközelebbi pontjához mutató helyvektor, \vec{c}_1 és \vec{c}_2 a normálvektorra merőleges, egymással nem párhuzamos vektorok. Egy tetszőleges \vec{u} vektornak az \vec{n} normálisú síkkal párhuzamos komponense az alábbi művelettel kapható meg: $\vec{n} \times (\vec{u} \times \vec{n})$. Ebből a tömegpont síkra vett vetületének mozgástörvénye, sebessége és gyorsulása:

$$\vec{r}_Q = \vec{n} \times (\vec{r} \times \vec{n}) + \vec{c}, \quad (1.30)$$

$$\dot{\vec{r}}_Q = \vec{v}_Q = \vec{n} \times (\dot{\vec{r}} \times \vec{n}) = \vec{n} \times (\vec{v} \times \vec{n}), \quad (1.31)$$

$$\dot{\vec{v}}_Q = \vec{a}_Q = \vec{n} \times (\dot{\vec{v}} \times \vec{n}) = \vec{n} \times (\vec{a} \times \vec{n}). \quad (1.32)$$

1.9. Egyenes vonalú egyenletes mozgás

1.9.1. Definíció (Egyenes vonalú egyenletes mozgás) Egyenes vonalú egyenletes mozgást végez a pontszerű test, ha a pályája egy egyenesre illeszkedik, és sebessége állandó.

Tekintettel arra, hogy a sebességvektor iránya és nagysága is állandó az egyenes vonalú egyenletes mozgás során, állandó sebességű mozgásnak is nevezik.

$$\vec{v}(t) = \vec{v} = \text{állandó}. \quad (1.33)$$

Az egyenes vonalú egyenletes mozgás speciális esete a nyugalom, amelyre $\vec{v} = \vec{0}$ jellemző. A mozgástörvény, a sebesség és a gyorsulás között fennálló összefüggések alapján megadhatók a következők:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}. \quad (1.34)$$

Az egyenes vonalú egyenletes mozgás gyorsulása nulla. Ez az egyetlen gyorsulásmentes mozgásforma. A mozgástörvény:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v} d\tau = \vec{r}_0 + \vec{v}t, \quad (1.35)$$

ahol \vec{r}_0 a kiindulási helyvektor. A 1.35. függvény egy egyenes (idő)paraméteres alakja. Az ívhosszparaméter előállítható:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{v^2} d\tau = \int_0^t v d\tau = vt. \quad (1.36)$$

Ez az ívhosszparaméter-idő függvény. Vegyük észre, hogy a sebesség nagysága szerepel benne, nem a sebességvektor. Ebből kifejezhető az idő: $t = \frac{s}{v}$, aminek segítségével a mozgástörvényből kiküszöbölhető az idő, mint paraméter, és megadható az egyenes vonalú egyenletes mozgás pályájának ívhosszparaméteres alakja:

$$\vec{r}(s) = \vec{r}_0 + \vec{v} \frac{s}{v} = \vec{r}_0 + \frac{\vec{v}}{v} s = \vec{r}_0 + \vec{t}s. \quad (1.37)$$

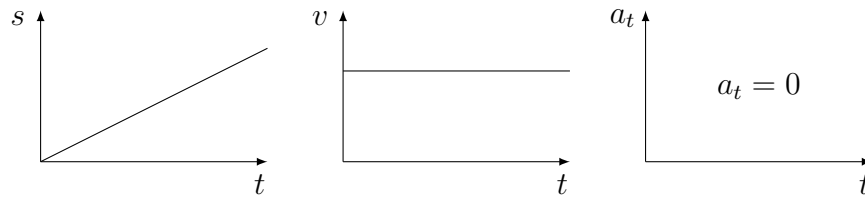
A $\vec{t} = \frac{\vec{v}}{v}$ vektor azonos a korábban bevezetett érintő irányú egységvektorral. Az egyenes vonalú egyenletes mozgás foronómiai függvényei:

$$s(t) = vt \quad \text{ívhosszparaméter, út-idő függvény,} \quad (1.38)$$

$$v(t) = \dot{s} = v \quad \text{pályasebesség,} \quad (1.39)$$

$$a_t(t) = \dot{v} = 0 \quad \text{pályagyorsulás.} \quad (1.40)$$

A foronómiai görbék a foronómiai függvények grafikus megjelenítései.



1.7. ábra. Az egyenes vonalú egyenletes mozgás foronómiai függvényei

1.10. Az állandó gyorsulású mozgás

1.10.1. Definíció (Állandó gyorsulású mozgás) Állandó gyorsulású mozgást végez a pontszerű test, ha a gyorsulásvektora állandó.

$$\vec{a}(t) = \vec{a} = \text{állandó.} \quad (1.41)$$

A sebesség-idő függvény:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} d\tau = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \quad (1.42)$$

A mozgástörvény:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t) d\tau = \vec{r}_0 + \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a}t) d\tau = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}}{2} t^2. \quad (1.43)$$

A mozgástörvény alakja mutatja, hogy az állandó gyorsulású mozgás síkmozgás, az \vec{r}_0 pontot tartalmazó, $(\vec{v}_0$ és $\vec{a})$ vektorok által kifeszített síkban zajlik a mozgás (1.8a. ábra).

1.10.1. Tétel (Állandó gyorsulású mozgás pályája) Az állandó gyorsulású mozgást végző tömegpont pályája parabola.

Bizonyítás. A pálya alakja könnyen meghatározható, ha egy síkbeli derékszögű koordináta-rendszert a pálya síkjába (a \vec{v}_0 , \vec{a} síkba) helyezzük úgy, hogy origója essen egybe a mozgás kezdőpontjával, a koordináta-rendszer y tengelye mutasson a gyorsulásvektor irányával ellentétesen (azért, hogy könnyebben lehessen hasonlítani a ferde hajításhoz), az x tengely pedig legyen erre a jobbcsavar szerint merőleges (1.8b. ábra).

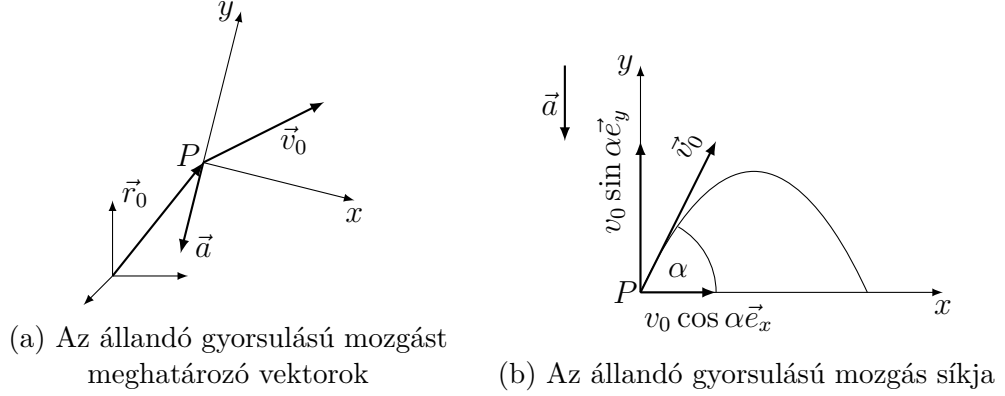
A felvett koordináta-rendszerben az x és y koordináták megadhatók az idő függvényeként:

$$x = v_0 \cos \alpha t, \quad (1.44)$$

$$y = v_0 \sin \alpha t - \frac{a}{2} t^2. \quad (1.45)$$

A t kiküszöbölésével ($t = x/v_0 \cos \alpha$) kapjuk a pálya egyenletét:

$$y(x) = \operatorname{tg} \alpha x - \frac{a}{2v_0^2(\cos \alpha)^2} x^2, \quad (1.46)$$



1.8. ábra. Az állandó gyorsulású mozgás pályája

ami egy parabola egyenlete, teljes négyzetté alakítással így írható:

$$y(x) = -\frac{a}{2v_0(\cos \alpha)^2} \left(x - \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{a} \right)^2 + \frac{v_0^2 (\sin \alpha)^2}{2a}. \quad (1.47)$$

□

Az 1.47. összefüggésből számos, a gyakorlatban értékes mennyiség leolvasható. Például v_0 nagyságú és α irányszögű, vízszintes terepen végzett, a talajról indított ferde hajítás esetén az emelkedési magasság $\frac{v_0^2 (\sin \alpha)^2}{2a}$, a földetérés távolsága $\frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{a}$. A homogén elektromos erőterben mozgó ponttöltés is állandó gyorsulású mozgást végez, amit az elektroncsőben, oszcilloszkópban, elektroncsöves televízióban és számítógép monitorokban hasznosítanak az elektronsugár irányítására, ezen keresztül kép megjelenítésére. Az állandó gyorsulású mozgás pályájának ívhosszparaméteres alakja abban az esetben írható fel legegyszerűbben, ha a kezdősebesség és a gyorsulásvektor párhuzamosak. Legyen a közös irányvektoruk az \vec{e}_a egységvektor, ekkor a 1.43. mozgástörvény az alábbi alakba írható:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}}{2} t^2 = \vec{r}_0 + \left(v_0 t + \frac{a}{2} t^2 \right) \vec{e}_a. \quad (1.48)$$

Ez a mozgástörvény egyenes menti mozgást ír le. Tehát az állandó gyorsulású mozgás pályája egyenessé fajul, ha a kezdősebesség és a gyorsulás párhuzamosak, ebben az esetben *egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgásnak*

nevezzük. Az ívhosszparaméter ekkor így írható:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{v^2} d\tau = \int_0^t \sqrt{(v_0 + a\tau)^2 \cdot \underbrace{(\vec{e}_a)^2}_1} d\tau = \\ &= \int_0^t (v_0 + a\tau) d\tau = v_0 t + \frac{a}{2} t^2. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Figyelembe vettük, hogy $s(t = 0) = 0$. Az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás mozgástörvényének ívhosszparaméteres alakja:

$$\vec{r}(s) = \vec{r}_0 + s\vec{e}_a. \quad (1.50)$$

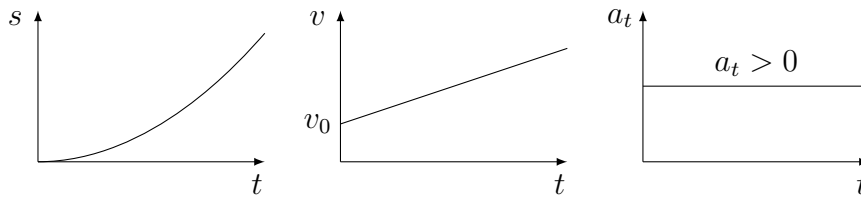
A pályasebesség:

$$v(t) = \dot{s} = v_0 + a t, \quad (1.51)$$

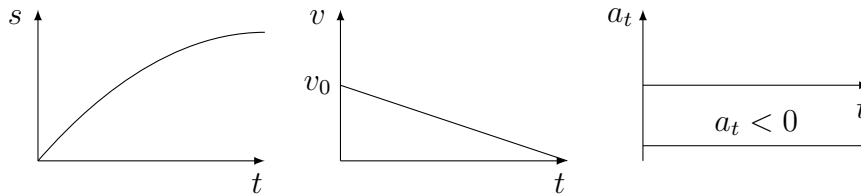
a pályagyorsulás:

$$a_t = \dot{v} = \ddot{s} = a. \quad (1.52)$$

Az állandó gyorsulású mozgás foronómiai görbéi párhuzamos kezdősebesség és gyorsulás esetén:



1.9. ábra. Az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás foronómiai függvényei, ha $\vec{v}_0 \cdot \vec{a} > 0$, azaz a két vektor azonos irányba mutat



1.10. ábra. Az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás foronómiai függvényei, ha $\vec{v}_0 \cdot \vec{a} < 0$, azaz a két vektor ellenkező irányba mutat

Az állandó gyorsulású mozgás ívhosszparaméterének időfüggése általános esetben lényegesen bonyolultabb. Legyen a \vec{v}_0 és az \vec{a} vektorok által bezárt szög α , ekkor nyilván $\vec{v}_0 \cdot \vec{a} = v_0 \cdot a \cdot \cos \alpha$. A 1.43. mozgástörvényből kiindulva a sebesség $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, az ívhosszparaméter időfüggése:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\vec{v}^2} d\tau = \int_0^t \sqrt{(\vec{v}_0 + \vec{a}\tau)^2} d\tau = \int_0^t \sqrt{v_0^2 + 2v_0a \cos \alpha \tau + a^2\tau^2} d\tau. \quad (1.53)$$

Ebből

$$s(t) = \left[\frac{(2a^2\tau + 2v_0a \cos \alpha) \sqrt{v_0^2 + 2v_0a \cos \alpha \tau + a^2\tau^2}}{4a^2} + \right. \\ \left. + \frac{4a^2}{2a^2v_0^2 - (2v_0a \cos \alpha)^2} \frac{1}{a} \ln \left(2a \sqrt{v_0^2 + 2v_0a \cos \alpha \tau + a^2\tau^2} + 2a^2\tau + 2v_0a \cos \alpha \right) \right]_0^t \quad (1.54)$$

Az ilyen integrálokat táblázatokból célszerű kikeresni ¹. Ezt az összefüggést nem alakítjuk tovább. Látható, hogy általános esetben az állandó gyorsulású mozgás ívhosszparaméteres alakját felírni igen bonyolult, ezért ezt nem is szoktuk megtenni. Ugyanakkor a kísérő triéder tagjai és a görbületi sugár kiszámíthatók más úton, a korábban megismert összefüggésekkel.

¹pl. Bronstein-Szemengyajev: Matematikai zsebkönyv, 448-449. o.

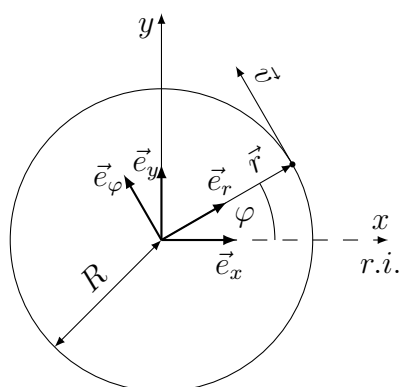
1.11. A körmozgás

1.11.1. Definíció (Körmozgás fogalma) Egy tömegpont körmozgást végez, ha a pályája körív.

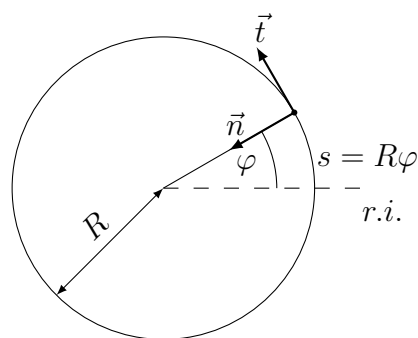
Nem csak az egyenletes, vagy az egyenletesen változó körmozgást értjük ezalatt, hanem egy körív alakú pálya mentén tetszőleges módon megvalósuló mozgást. A körmozgásnak az sem feltétele, hogy a tömegpont a mozgása során egy teljes kört befusson, a mozgás korlátozódhat egy körív alakú pályára is. Körmozgást végeznek például a matematikai inga, a körív alakú kanyarban közlekedő jármű vázának pontjai, számos forgó gépalkatrész egy-egy pontja. Körmozgást pontszerű testek, vagy kiterjedt testek pontjai végeznek, a kiterjedt testek egésze esetén forgómozgásról beszélünk.

A körmozgás síkmozgás, mert a körív egy síkgörbe.

A körmozgást célszerű olyan síkbeli polár koordináta-rendszerben tárgyalni, amelynek síkja megegyezik a körív síkjával, és origója egybeesik a körív középpontjával (1.11a. ábra). Ugyanakkor a körmozgás jól leírható olyan derékszögű koordináta-rendszerben is, amelynek origója egybeesik a kör középpontjával, x tengelye pedig a referencia iránnyal.



(a) A körmozgást jellemző mennyiségek

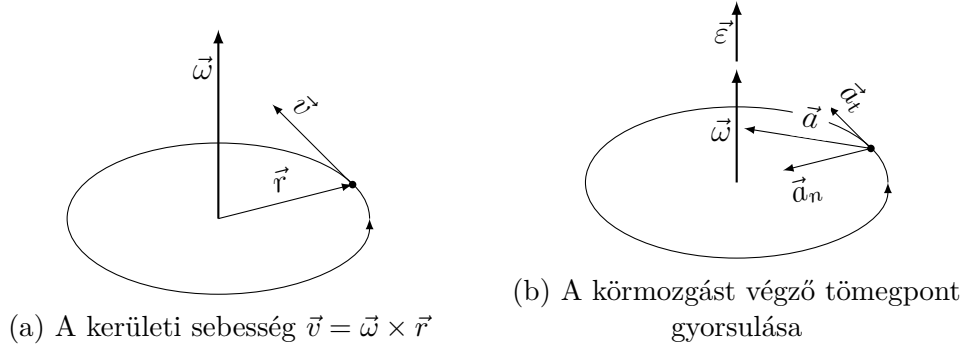


(b) A körmozgás geometriai jellemzői

1.11. ábra. A körmozgás megadása

A körmozgás időfüggése egyetlen paraméter segítségével megadható, ez a polárszög időfüggése: $\varphi(t)$. Az alábbi táblázat megadja a körmozgás mozgástörvényét, sebességét és gyorsulását mindkét koordináta-rendszerben.

A 1.11a. ábra, valamint a koordináta-rendszerekre vonatkozó összefüggések alapján könnyen észrevehető, hogy a 1.1. táblázat azonos soraiban elhelyezkedő képletek az $\vec{e}_r = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y$, és az $\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y$,



1.12. ábra. A körmozgást jellemző vektor mennyiségek

	síkbelipolár KR	síkbeli derékszögű KR
mozgástörvény	$\vec{r}(t) = R\vec{e}_r(t), \varphi = \varphi(t)$	$\vec{r}(t) = R \cos \varphi(t) \vec{e}_x + R \sin \varphi(t) \vec{e}_y$
sebesség	$\vec{v}(t) = R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$	$\vec{v}(t) = -R\dot{\varphi} \sin \varphi \vec{e}_x + R\dot{\varphi} \cos \varphi \vec{e}_y$
gyorsulás	$\vec{a}(t) = -R\dot{\varphi}^2\vec{e}_r + R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi$	$\vec{a}(t) = -R\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \vec{e}_x - R\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \vec{e}_y - R\ddot{\varphi} \sin \varphi \vec{e}_x + R\ddot{\varphi} \cos \varphi \vec{e}_y$

1.1. táblázat. A körmozgás mozgástörvénye, sebessége és gyorsulása síkbeli polár és derékszögű koordináta-rendszerekben

helyettesítésekkel könnyen átalakíthatók egymásba.

Bevezetjük a szögsebesség vektort (1.12a ábra).

1.11.2. Definíció (Szögsebesség) A körmozgás szögsebesség vektorának nagysága $\dot{\varphi}$, iránya a körmozgás síkjára a jobbcsavarnak megfelelően merőleges. A szögsebesség vektormennyiség, jele: $\vec{\omega}$. A szögsebesség mértékegysége $[\vec{\omega}] = \frac{1}{s} = \frac{\text{rad}}{s}$.

A szögsebesség vektor definíciója hasonlóságot mutat az elfordulás vektor definíciójával (7.64. és 7.65. összefüggések), ami nem véletlen. A szögsebesség vektor a körmozgást leíró síkbeli polár koordináta-rendszer radiális egységvektorának időegységre eső elfordulásvektora. Valójában a \vec{e}_φ , \vec{t} és \vec{n} vektorokra is elmondható ugyanez, mert azonos ütemben és azonos síkban forognak az \vec{e}_r vektorral. Ha a \vec{b} vektor a körmozgás síkjának a polárszög növekedésének megfelelő körüljáráshoz jobbcsavar szerint irányított felületi normálisa, akkor a szögsebesség így írható:

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{b}. \quad (1.55)$$

Világos, hogy $\vec{b} \times \vec{e}_r = \vec{e}_\varphi$. Az 1.1. táblázat sebességet tartalmazó sorában található összefüggésekből leolvasható, hogy a körmozgást végző tömegpont

sebessége:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (1.56)$$

gyorsulása a sebesség deriválásával kapható:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\vec{\omega} \times \vec{r})' = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \quad (1.57)$$

ami a táblázat gyorsulást tartalmazó sorának formuláival összhangban áll.

1.11.3. Definíció (Szöggyorsulás) A szöggyorsulás vektor a szögsebesség idő szerinti differenciálhányadosa: $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$. A szöggyorsulás mértékegysége: $[\vec{\varepsilon}] = \frac{1}{s^2} = \frac{\text{rad}}{s^2}$.

1.11.1. Tétel (Körmozgás szöggyorsulása) A körmozgás szöggyorsulása mindig merőleges a körívpálya síkjára.

Bizonyítás. Körmozgás esetén a szögsebességvektor a definíciója szerint mindig $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{b}$ alakú, ahol \vec{b} a polársíkra jobbsavár szerint merőleges (állandó) egységvektor, vagyis a szögsebesség mindig merőleges a körívpálya síkjára. A szöggyorsulás definíciójából következik:

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\vec{b} = \ddot{\varphi}\vec{b} = \varepsilon\vec{b}. \quad (1.58)$$

□

1.11.4. Definíció (Centripetális gyorsulás) A körmozgás centripetális (középpont felé mutató) gyorsulás komponense:

$$\vec{a}_{cp} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (1.59)$$

1.11.5. Definíció (Tangenciális gyorsulás) A körmozgás tangenciális (érintő irányú) gyorsulás komponense:

$$\vec{a}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}. \quad (1.60)$$

A centripetális és a tangenciális gyorsulás komponensek merőlegesek egymásra. A körmozgást végző test gyorsulása így is írható:

$$\vec{a} = \vec{a}_{cp} + \vec{a}_t, \quad (1.61)$$

amiből leolvasható az alábbi fontos összefüggés is

$$a^2 = a_{cp}^2 + a_t^2. \quad (1.62)$$

A körmozgás két fontos speciális esete az egyenletes és az egyenletesen változó körmozgás. Először az egyenletes körmozgást tárgyaljuk.

1.11.1. Az egyenletes körmozgás

1.11.6. Definíció (Egyenletes körmozgás) Az egyenletes körmozgás olyan körmozgás, melynek szögsebessége állandó.

Ezzel a definícióval egyenértékű az is, ha ezt mondjuk: egyenletes körmozgást végez a tömegpont, ha a pályája kör, és azonos időközök alatt azonos ívhosszakat tesz meg, bármekkora is választjuk az időközöket.

Az egyenletes körmozgás periódusideje

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (1.63)$$

fordulatszáma:

$$n = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (1.64)$$

a kettő közötti összefüggés:

$$T = \frac{1}{n}. \quad (1.65)$$

A fordulatszám mértékegysége $[n] = \frac{1}{s} = \frac{\text{fordulat}}{s}$ nem azonos a szögsebesség mértékegységével, noha dimenziójuk megegyezik. Ennek az az oka, hogy sem a radián, sem a fordulat vagy "darab" nem fizikai mértékegységek. Ha a szögsebesség állandó, akkor $\dot{\varphi} = \omega = \text{állandó}$ alapján $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$ írható. Az ívhosszparaméter időfüggése:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(R\omega)^2} d\tau = \int_0^t R\omega d\tau = R\omega \int_0^t d\tau = R(\varphi_0 + \omega t). \quad (1.66)$$

Ebből

$$t = \frac{s - R\varphi_0}{\omega} = \frac{s - s_0}{\omega}. \quad (1.67)$$

Az ívhosszparamétert úgy választjuk, hogy a mozgás kezdetén értéke nulla legyen, ez alapján az integrálási állandóra a $\varphi_0 = 0$, ezzel együtt az $s_0 = 0$ értékeket választjuk. Ez alapján az időt az ívhosszparaméterrel az egyszerűbb $t = \frac{s}{\omega}$ formula kapcsolja össze. A mozgástörvény:

$$\vec{r}(t) = R\vec{e}_r, \quad \varphi(t) = \omega t, \quad (1.68)$$

melynek ívhosszparaméteres alakja:

$$\vec{r}(s) = R\vec{e}_r, \quad \varphi(s) = \omega \frac{s}{\omega} = s. \quad (1.69)$$

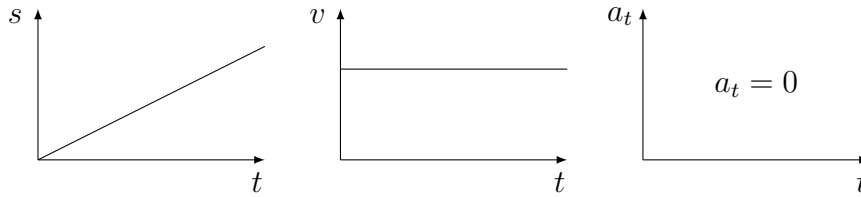
A pályasebesség:

$$v = \dot{s} = R\omega, \quad (1.70)$$

a pályagyorsulás:

$$a_t = \dot{v} = 0. \quad (1.71)$$

A foronómiai görbék:



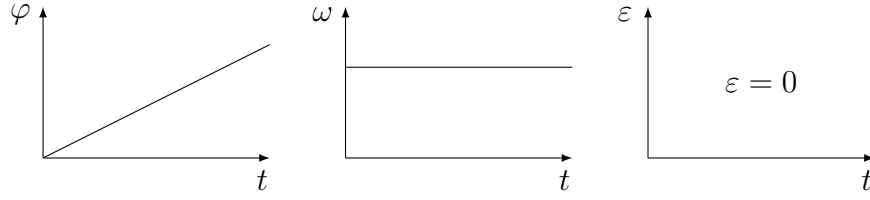
1.13. ábra. Az egyenletes körmozgás foronómiai függvényei

Osszuk el a foronómiai függvényeket a kör sugarával. Felhasználva az

$$\frac{s}{R} = \varphi, \quad \frac{v}{R} = \omega, \quad \frac{a_t}{R} = \varepsilon = 0 \quad (1.72)$$

összefüggéseket, a $\varphi(t), \omega(t), \varepsilon(t)$ függvényeket ábrázolva a következőket kapjuk:

Az egyenletes körmozgás (s, v, a_t) és $(\varphi, \omega, \varepsilon)$ függvényei egymással szoros kapcsolatban állnak. Az egyenes vonalú egyenletes mozgás foronómiai függvényei (1.7. ábra) ugyanilyen alakúak.



1.14. ábra. Az egyenletes körmozgás polárszögének, szögsebességének és szöggyorsulásának időfüggése

1.11.2. Az egyenletesen változó körmozgás

1.11.7. Definíció (Egyenletesen változó körmozgás) Az egyenletesen változó (gyorsuló) körmozgás olyan körmozgás, melynek szöggyorsulása állandó.

Az $\vec{\varepsilon}(t) = \vec{\varepsilon} = \text{állandó} = \varepsilon \vec{b}$ feltételből a szögsebesség időfüggése:

$$\vec{\omega}(t) = \int_0^t \vec{\varepsilon} d\tau = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon}t, \quad (1.73)$$

és a polárszög időfüggése is kiszámítható:

$$\varphi(t)\vec{b} = \int_0^t \vec{\omega} d\tau = \int_0^t (\vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon}t) d\tau = \vec{b} \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t) d\tau = (\varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon}{2} t^2) \vec{b}. \quad (1.74)$$

Kihasználtuk, hogy a szögsebesség és a szöggyorsulás is merőleges a körívpálya síkjára. A $\varphi(t)\vec{b}$ mennyiség a körmozgást végző tömegpont felé mutató radiális egységvektor elfordulásvektora a $[0, t]$ időintervallumban, ennek a vektornak a nagysága a polárszög időfüggése ($\varphi(t)$).

Az egyenletesen gyorsuló körmozgás mozgástörvénye, sebessége, gyorsulása síkbeli polárkoordinátákban:

$$\vec{r}(t) = R\vec{e}_r, \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon}{2} t^2, \quad (1.75)$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = R(\omega_0 + \varepsilon t)\vec{e}_\varphi, \quad (1.76)$$

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = R\varepsilon\vec{e}_\varphi - R(\omega_0 + \varepsilon t)^2\vec{e}_r. \quad (1.77)$$

Az ívhosszparaméter időfüggése (a szokásos $s(t=0)=0$ kezdeti feltétellel):

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\vec{v}^2} d\tau = \int_0^t \sqrt{R^2(\omega_0 + \varepsilon t)^2 \cdot \vec{e}_\varphi^2} d\tau = \int_0^t R(\omega_0 + \varepsilon t) d\tau = R(\omega_0 t + \frac{\varepsilon}{2} t^2), \quad (1.78)$$

ebből a pályasebesség:

$$v(t) = \dot{s}(t) = R(\omega_0 + \varepsilon t), \quad (1.79)$$

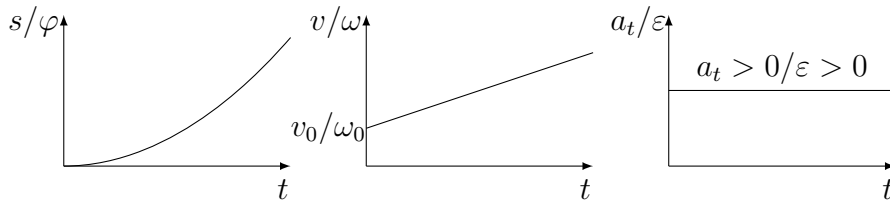
a pályagyorsulás:

$$a_t(t) = \dot{v}(t) = R\varepsilon. \quad (1.80)$$

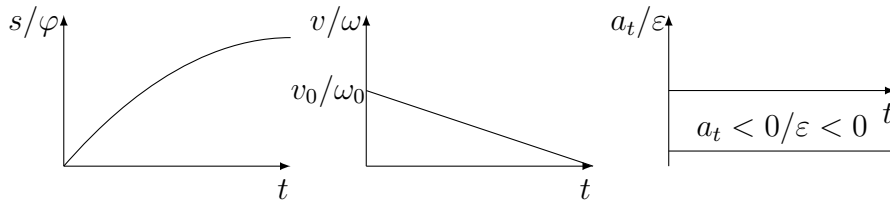
A foronómiai görbék mindegyikét osztva a körív R sugarával, megkapjuk a körmozgásra jellemző másik három mennyiség, a $\varphi, \omega, \varepsilon$ időfüggését:

$$\frac{s(t)}{R} = \varphi(t) = \omega_0 t + \frac{\varepsilon}{2} t^2, \quad \frac{v}{R} = \omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t, \quad \frac{a_t(t)}{R} = \varepsilon(t) = \varepsilon = \text{állandó}. \quad (1.81)$$

Ebben az esetben is elmondható, hogy az s, v, a_t foronómiai függvények a $\varphi, \omega, \varepsilon$ függvényekkel azonos alakúak, és a hasonlóság fennáll az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás foronómiai függvényeivel (1.9, 1.10 ábrák).



1.15. ábra. Az egyenletesen gyorsuló körmozgás foronómiai függvényei



1.16. ábra. Az egyenletesen gyorsuló körmozgás foronómiai függvényei

1.12. A harmonikus rezgőmozgás

1.12.1. Definíció (Harmonikus rezgőmozgás) Harmonikus rezgőmozgást végez a pontszerű test, ha a pályája egyenes szakasz, és mozgástörvénye

$$\vec{r}(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) \vec{e} = x(t) \vec{e} \quad (1.82)$$

alakú.

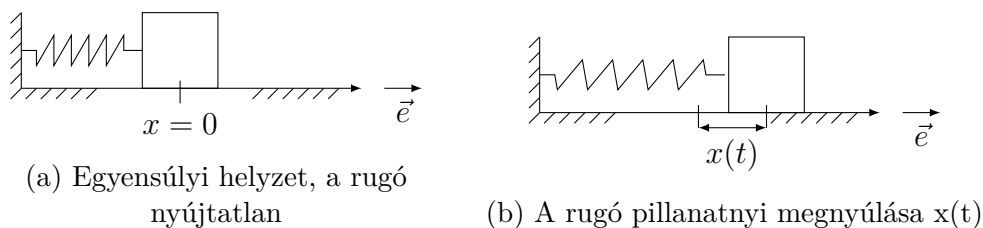
Az \vec{e} egységvektor a pálya egyenesének irányvektora, A az amplitúdó, ω a körfrekvencia, φ_0 a kezdőfázis. A harmonikus rezgőmozgás legegyszerűbben ún. lineáris rugó segítségével hozható létre (1.17. ábra).

1.12.2. Definíció (Amplitúdó) A harmonikus rezgőmozgás amplitúdója az egyensúlyi helyzettől való legnagyobb kitérése.

1.12.3. Definíció (Körfrekvencia) A harmonikus rezgőmozgás körfrekvenciája a megfelelő egyenletes körmozgás szögsebessége.

1.12.4. Definíció (Fázis) A harmonikus rezgőmozgás fázisa az $\omega t + \varphi_0$ mennyiség. A fázisnak nincs fizikai mértékegysége. A fázis matematikai mértéke a radián.

Kivételes esetben a fázist fokokban is meg lehet adni, ekkor különös figyelemmel kell eljárni.



1.17. ábra. A harmonikus rezgőmozgás legegyszerűbb megvalósítása (itt a megtámasztás és a test között nincs súrlódás)

Az x koordinátát általában úgy vesszük fel, hogy a rugó nyújtatlan állapotában legyen $x = 0$. A mozgás erőtan elemzésével nem itt foglalkozunk, hanem egy későbbi fejezetben.

1.12.1. Tétel (Harmonikus rezgés és körmozgás kapcsolata) Bármely harmonikus rezgőmozgáshoz található olyan egyenletes körmozgás, amelynek síkjába eső egyenesre vett vetülete megegyezik a harmonikus rezgőmozgással.

Bizonyítás. A 1.1. táblázat és a 1.68. összefüggés alapján az egyenletes körmozgás mozgástörvénye derékszögű koordinátákban:

$$\vec{r}(t) = R \cos(\omega t) \vec{e}_x + R \sin(\omega t) \vec{e}_y, \quad (1.83)$$

ahol R a kör sugara, ω a körmozgás szögsebessége, ami egyenletes körmozgás esetén állandó, φ_0 a kezdeti polárszög. Vetítsük az egyenletes körmozgást a

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{c} + \lambda \vec{e} \quad (1.84)$$

paraméteres alakban megadott egyenesre (1.24. egyenlet). A vetület mozgástörvénye 1.25. alapján:

$$\vec{r}_Q = \vec{e}((R \cos(\omega t) \vec{e}_x + R \sin(\omega t) \vec{e}_y) \vec{e}) + \vec{c}. \quad (1.85)$$

Az \vec{e} vektorra csak annyi kikötést tettünk, hogy a körpálya síkjába esik, ezért a síkon belül bármilyen irányú lehet, ezt az irányt jellemezze az \vec{e}_y és az \vec{e} vektorok által bezárt α szög. Ennek segítségével kifejezhetők az alábbi skaláris szorzatok:

$$\vec{e}_x \vec{e} = \sin \alpha, \quad \vec{e}_y \vec{e} = \cos \alpha. \quad (1.86)$$

Alakítsuk tovább a 1.85. vetületi mozgástörvényt:

$$\vec{r}_Q = \vec{e}(R \cos(\omega t) \vec{e}_x \vec{e} + R \sin(\omega t) \vec{e}_y \vec{e}) + \vec{c} = \quad (1.87)$$

$$= \vec{e}R(\cos(\omega t) \sin \alpha + \sin(\omega t) \cos \alpha) + \vec{c} = \quad (1.88)$$

$$= \vec{e}R \sin(\omega t + \alpha) + \vec{c}. \quad (1.89)$$

Az utolsó lépésben a két szög összegének szimuszára vonatkozó trigonometrikus azonosságot alkalmaztuk.

Ha a koordináta-rendszer kezdőpontját eltoljuk a \vec{c} végpontjába, akkor a 1.89. vetületi mozgástörvény az alábbi alakba írható:

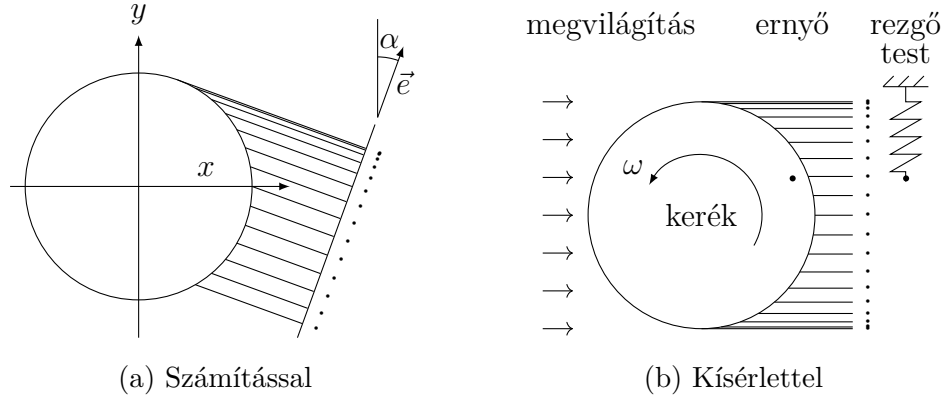
$$\vec{r}_Q = \vec{e}R(\sin(\omega t + \alpha)). \quad (1.90)$$

Az $R = A$ és $\alpha = \varphi_0$ megfeleltetésekkel, valamint a 1.82. és az 1.90. formulák összevetésével látható, hogy az állítást igazoltuk. \square

Észrevehető, hogy az α szöget azért választottuk az \vec{e}_y és az \vec{e} vektorok által bezárt szögnek, és nem az \vec{e}_x és az \vec{e} vektorok által bezárt szögnek, mert így egyszerűbben lehet eljutni a vetületi mozgástörvény 1.89. alakjára, amely közvetlenül megfeleltethető a harmonikus rezgőmozgás mozgástörvényének. A másik esetben is el lehet jutni ehhez az alakhoz, de körülményesebben.

Bármely harmonikus rezgőmozgás az A amplitúdóval megegyező sugarú, az ω körfrekvenciával megegyező szögsebességű egyenletes körmozgásnak az y tengellyel α szöget bezáró, a körmozgás síkjába eső egyenesre vett vetületeként is előállítható. Ebből a megfeleltetésből ered az ω körfrekvencia elnevezés.

Az egyenletes körmozgás és a harmonikus rezgőmozgás kapcsolata kísérettel is jól szemléltethető. Egy kerék oldalára a széléhez közel apró testet



1.18. ábra. A harmonikus rezgőmozgás az egyenletes körmozgás vetülete

erősítünk, melynek a forgástengelytől való távolsága állítható. A kereket az egyik éle irányából megvilágítjuk, a másik oldalára ernyőt helyezünk, amelyen a kerék, és a rá erősített kis test árnyéka megfigyelhető. A kerék mellé egy állványhoz erősített rugóra függesztett testet is elhelyezünk, amelynek árnyéka szintén látható az ernyőn. Mozgásba hozzuk a rugóra függesztett testet. Ezt követően a kereket forgatni kezdjük. A testnek a forgástengelytől való távolságát és a kerék szögsebességét (fordulatszámát) megfelelően beállítva, a kerékhez rögzített test, és a rezgő test árnyéka együtt mozog (1.18b. ábra, itt a kerék és a rugóra függesztett test egymáshoz viszonyított helyzete a szemléletesség érdekében nem azonos a kísérletbeli helyzettel). Ez a kísérlet azért igen találó, mert nemcsak a két mozgás kapcsolatára, hanem a vetület elméleti úton való kiszámításának lényegére is rávilágít.

A harmonikus rezgőmozgás nem csak a körfrekvenciát "örökli" a körmozgástól, hanem időbeliségét jellemző több más mennyiséget is. A T periódusidő és az f frekvencia:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad (1.91)$$

A frekvencia mértékegysége $[f] = \frac{1}{s} = \frac{\text{periódus}}{s} = Hz$.

A harmonikus rezgőmozgás sebessége és gyorsulása:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) \vec{e}, \quad (1.92)$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \vec{e} = -A\omega^2 x. \quad (1.93)$$

Az ívhosszparaméter

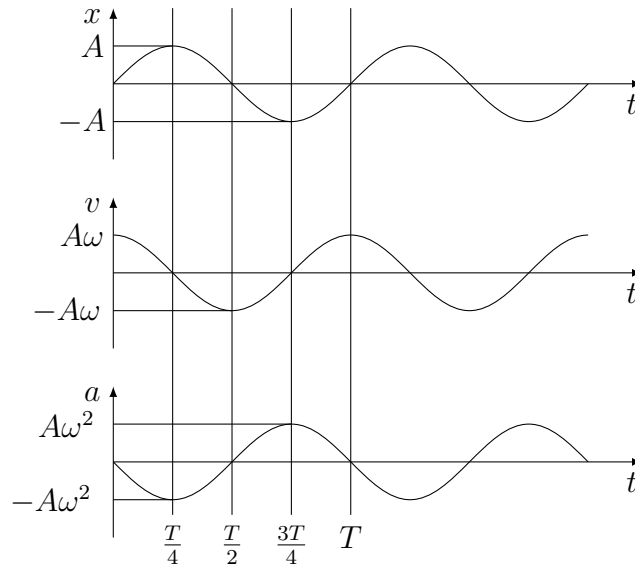
$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{\vec{v}^2} d\tau = \int_0^t \sqrt{(A\omega \cos(\omega t + \varphi_0))^2 (\vec{e})^2} d\tau = \int_0^t A\omega |\cos(\omega t + \varphi_0)| d\tau \\ &= \text{egész rész} \left(\frac{t}{T} \right) \cdot 4A\omega + \int_0^{\text{mod}(t, T)} A\omega |\cos(\omega t + \varphi_0)| d\tau. \end{aligned} \quad (1.94)$$

A harmonikus rezgőmozgás esetén is értelmezett szakaszonként az ívhossz, de számításokra nem használatos matematikai körülményessége miatt (az ívhosszparaméter-idő függvény nem invertálható, így nem is használható paraméterként). Ezt a mozgást a kitérés, a sebesség és a gyorsulás segítségével szokás jellemezni.

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (1.95)$$

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1.96)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (1.97)$$

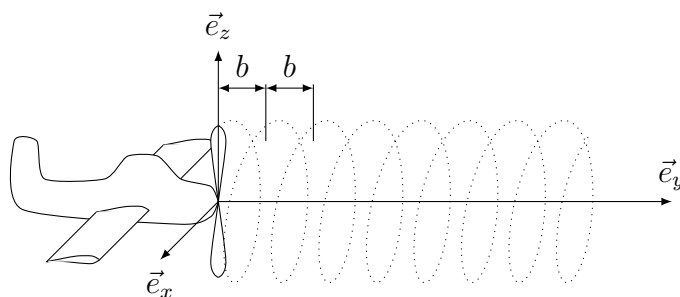


1.19. ábra. A harmonikus rezgőmozgás kitérése, sebessége és gyorsulása az idő függvényében, a $\varphi_0 = 0$ esetben

1.13. Számítási példák (tömegpont kinematikája)

1.13.1. Feladat. Egy repülőgép légcsavarjának átmérője 2 m, fordulatszáma $2400 \frac{1}{\text{min}}$. A repülőgép vízszintes irányban állandó nagyságú $216 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel halad.

- Adja meg a légcsvavar egyik végpontjának mozgástörvényét! A koordináta-rendszer kezdőpontja legyen éppen a légcsvavar középpontjában akkor, amikor az időmérést kezdjük (a $t = 0$ s időpillanatban), az y tengely legyen párhuzamos a repülőgép utazósebességével. A z tengely mutasson függőlegesen felfelé, és az időmérés kezdőpillanatában a légcsvavar végpontja legyen éppen ennek a tengelynek a pozitív oldalán.
- Mennyi a légcsvavar végpontja által befutott csavarvonal menetemelkedése?
- Adja meg a légcsvavar végpontjának sebességét az idő függvényében! Számítsa ki a sebesség nagyságát!
- Adja meg a légcsvavar végpontjának gyorsulását az idő függvényében! Számítsa ki a gyorsulás nagyságát!
- Adja meg a pálya görbületét!



1.20. ábra. A repülőgéphez rögzített koordináta-rendszer (1.13.1. feladat)

Megoldás

A légcsvavar végpontjának pályája csavarvonal, amit az 1.20. ábra szemléltet. A számítások előkészítéséhez az alábbi megfontolásokat tesszük. A légcsvavar fordulatszámát célszerű átváltani $\frac{1}{\text{s}}$ egységekbe: $n = 2400 \frac{1}{\text{min}} =$

$\frac{2400}{60} \frac{1}{s} = 40 \frac{1}{s}$. Ebből a periódusideje $T = \frac{1}{n} = \frac{1}{40} s = 0,025 s$, a szögsebessége $\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot 40 \frac{1}{s} = 80\pi \frac{1}{s}$. A vízszintes sebességet is átváltjuk: $v_{rep} = 216 \frac{km}{h} = \frac{216}{3,6} \frac{m}{s} = 60 \frac{m}{s}$.

a) A megadott koordináta-rendszerben a légsavar végpontjának a pályája olyan csavarvonal, amelynek xy síkra vett vetülete 1 m sugarú, origó középpontú kör, tengelye pedig éppen az y koordináta-tengely. A légsavar a pilóta felől nézve pozitív irányba forog. Ebből a mozgás xy síkra vett vetülete megadható: $\vec{r}_{xy} = \cos(\omega t)\vec{e}_z - \sin(\omega t)\vec{e}_x$. Figyelembe véve, hogy eközben az y tengely irányába is mozog a pont v_{rep} sebességgel, a mozgástörvény:

$$\vec{r}(t) = -\sin(\omega t)\vec{e}_x + v_{rep}t\vec{e}_y + \cos(\omega t)\vec{e}_z. \quad (1.98)$$

$$\vec{r}(t) = -\sin(80\pi t)\vec{e}_x + 60t\vec{e}_y + \cos(80\pi t)\vec{e}_z \text{ m.} \quad (1.99)$$

b) A menetemelkedés megmutatja, hogy a légsavar egy körülfordulása közben mennyit haladt előre a repülőgép. Már meghatároztuk a légsavar periódusidejét (T), és ismerjük a haladási sebességét (v_{rep}). Ebből az egy fordulatra eső előrehaladás, vagyis a vizsgált pont pályájának menetemelkedése: $b = v_{rep} \cdot T = 60 \frac{m}{s} \cdot 0,025 s = 1,5 m$.

c)

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -80\pi \cos(80\pi t)\vec{e}_x + 60\vec{e}_y - 80\pi \sin(80\pi t)\vec{e}_z \frac{m}{s} \quad (1.100)$$

A sebesség nagysága egy tetszőleges időpillanatban:

$$\begin{aligned} |\vec{v}(t)| = v(t) &= \sqrt{(-80\pi \cos(80\pi t))^2 + 60^2 + (-80\pi \sin(80\pi t))^2} \frac{m}{s} = \\ &= \sqrt{6400\pi^2(\cos(80\pi t))^2 + 60^2 + 6400\pi^2(\sin(80\pi t))^2} \frac{m}{s} = \\ &= \sqrt{6400\pi^2 + 60^2} \frac{m}{s} = 258,4 \frac{m}{s} = v. \end{aligned} \quad (1.101)$$

A sebesség nagysága állandó, de iránya változik.

d)

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = 6400\pi^2 \sin(80\pi t)\vec{e}_x - 6400\pi^2 \cos(80\pi t)\vec{e}_z \frac{m}{s^2} \quad (1.102)$$

A gyorsulás nagysága egy tetszőleges időpillanatban:

$$\begin{aligned} |\vec{a}(t)| = a(t) &= \sqrt{(6400\pi^2 \cos(80\pi t))^2 + (6400\pi^2 \sin(80\pi t))^2} \frac{m}{s^2} = \\ &= \sqrt{40960000\pi^4(\cos(80\pi t))^2 + 40960000\pi^4(\sin(80\pi t))^2} \frac{m}{s^2} = \\ &= \sqrt{3,98987 \cdot 10^9} \frac{m}{s^2} = 63165,47 \frac{m}{s^2} = a. \end{aligned} \quad (1.103)$$

A gyorsulás nagysága állandó, de iránya változik.

e) Az érintő irányú egységvektor:

$$\vec{t} = \frac{-80\pi}{v} \cos(80\pi t) \vec{e}_x + \frac{60}{v} \vec{e}_y + \frac{-80\pi}{v} \sin(80\pi t) \vec{e}_z \quad (1.104)$$

A gyorsulás érintő irányú koordinátája:

$$\begin{aligned} a_t &= \vec{a} \vec{t} = \\ &= \frac{-512000\pi^3}{v} \sin(80\pi t) \cos(80\pi t) + \frac{512000\pi^3}{v} \cos(80\pi t) \sin(80\pi t) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ &= 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned} \quad (1.105)$$

A gyorsulásnak nincs érintő irányú összetevője. Ebből következik, hogy

$$a_n = a \quad (1.106)$$

A görbületi sugár:

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(258,4 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{63165,47 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1,057 \text{m}. \quad (1.107)$$

A görbületi sugár nem függ az időtől, mert a sebesség és a normális irányú gyorsulás nagysága is időfüggetlen. A feladatban leírt hélix pálya állandó görbületű térgörbe. A görbület:

$$\kappa = \frac{1}{R} = 0,946 \frac{1}{\text{m}}. \quad (1.108)$$

✓

1.13.2. Feladat. Egy függőleges dobos szervestrágya szóró gép 20 cm hosszúságú szórólapátja (tépőfoga) másodpercenként 8 fordulatot tesz meg. A munkagép állandó nagyságú 2 m/s sebességgel halad egyenesen. Tudjuk továbbá, hogy a trágyázó gép szóró egységének a legalacsonyabb pontja 1m, a legmagasabb pontja 3 m magasan helyezkedik el a talaj felett. Ebben a feladatban azt feltételezzük, hogy a gép vízszintes terepen dolgozik.

- A talajhoz viszonyítva milyen nagyságú sebességgel hagyja el a szórógépet az a trágyaszemcse, amely a menetiránnyal párhuzamosan (hátrafelé), 2 m magasságból indul? Feltételezzük, hogy a részecskét a lapát végpontja löki ki.
- Az indítás helyétől milyen távolságban ér földet az a) kérdésben leírt trágyaszemcse?

- c) Egymástól milyen távolságban érnek földet a szóró egység legalacsonyabb és legmagasabb pontjából azonos pillanatban, a menetiránnyal párhuzamos irányban hátrafelé kidobott részecskék?

Megoldás

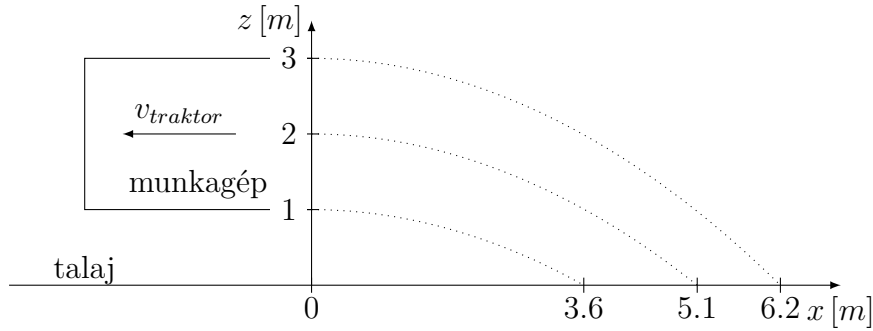
- a) A trágyaszemcse a kilökés pillanatáig a lapát végpontjával együtt mozog, így a munkagép vázához viszonyított sebessége megegyezik a lapát kerületi sebességével

$$v' = r\omega = 0,2 \text{ m} \cdot 2\pi \cdot 8 \frac{1}{\text{s}} = 10,05 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (1.109)$$

A szemcse talajhoz viszonyított sebessége a kilökéskor:

$$v_0 = v' - v_{traktor} = 10,05 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 8,05 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (1.110)$$

- b) Használjuk az 1.21. ábrán megadott, a kilökés pillanatában felvett koordináta-rendszert.



1.21. ábra. A kilökés pillanatában felvett koordináta-rendszer

Ebben a koordináta-rendszerben a h magasságban vízszintes irányban v_0 kezdősebességgel indított részecske mozgástörvénye

$$\vec{r}(t) = v_0 t \vec{e}_x + (h - 5t^2) \vec{e}_z m. \quad (1.111)$$

A földet érés pillanatában a z koordináta nulla, ebből kiszámítható a földetéréshez szükséges idő:

$$t_f = \sqrt{\frac{h}{5}}. \quad (1.112)$$

Ebben a pillanatban a szemcse x koordinátája, vagyis a kidobás helyétől (nem a munkagéptől, mert az közben előre haladt!) való távolsága

$$x_f = v_0 \cdot t_f. \quad (1.113)$$

$h = 2 \text{ m}$ esetén $t_{f2} = 0,632 \text{ s}$ és $x_{f2} = 8,05 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,632 \text{ s} = 5,1 \text{ m}$.

c) A b) feladatrész megoldásában látott módon kapjuk, hogy

ha $h = 1 \text{ m}$, akkor $t_{f1} = 0,447 \text{ s}$ és $x_{f1} = 3,6 \text{ m}$, és

ha $h = 3 \text{ m}$, akkor $t_{f3} = 0,776 \text{ s}$ és $x_{f3} = 6,2 \text{ m}$.

Ezek a szemcsék egymástól

$$d = x_{f3} - x_{f1} = 6,2 \text{ m} - 3,6 \text{ m} = 2,6 \text{ m} \quad (1.114)$$

távolságban érnek földet.

Megjegyzés: a különböző magasságokból egyszerre indított szemcsék nem egyszerre érnek földet, ahogy azt t_{f1}, t_{f2}, t_{f3} értékei is mutatják. ✓

2.

A tömegpont dinamikája

Kissé leegyszerűsítve azt mondhatjuk, hogy a kinematikában csak a hely, sebesség és gyorsulás érdekelt bennünket, a dinamikában ezeken túl erővel, tömeggel, energiával is foglalkozunk. A dinamika a mechanika tudományterület része.

A dinamika feladata, hogy feltárja a mozgás okait minőségi és mennyiségi értelemben. A dinamika választ keres a következő kérdésekre:

- *Miért* mozognak a testek?
- *Hogyan* függ össze a testek mozgása a mozgást kiváltó okokkal, vagy azok hiányával?

A dinamikának része a statika, amely a tartós nyugalom feltételeit kutatja. Ennek nagy jelentősége van a műszaki tudományterületen. Minden összefüggés, amit a dinamikában megismerünk, alkalmazható a statikában úgy, hogy nulla gyorsulást és nulla sebességet helyettesítünk be azokba. A statikát itt nem tárgyaljuk részletesen, mert az külön tantárgy témája.

A tömegpont dinamikájának tárgyalásakor találkozunk szinte minden fogalommal, amelyek később a pontrendszerek és a merev test dinamikájához szükségesek.

Ez a fejezet a dinamika newtoni tárgyalásmódját mutatja be. A dinamika axiómáiból indulunk ki, majd bevezetjük a dinamikai mennyiségeket, bemutatjuk a dinamika tételeit. Az olvasónak azt javasoljuk, hogy e fejezet tanulmányozása közben ne essen a könnyelműség hibájába az összefüggések egyszerűsége láttán. A tömegpont dinamikájának elsajátításának célja elsősorban az alapelvek, fogalmak megismerése, melyek felkészítenek arra, hogy a továbbiakban összetettebb rendszerek dinamikáját tanulmányozzuk. A tömegpont dinamikájában tárgyalandó elvek, fogalmak, összefüggések többsége a korábbi tanulmányokból ismert. Ezért nem feltétlenül kezdjük el azok

magyarázatát az alapoktól, hanem inkább jelentőségüket, következményeiket igyekszünk megmutatni.

2.1. A tehetetlenség törvénye, inerciarendszer, erő

1. Axióma (Newton első törvénye, a tehetetlenség törvénye, a dinamika első axiómája).

Egy pontszerű test megmarad a nyugalom, vagy az egyenes vonalú egyenletes mozgás állapotában mindaddig, amíg más testek hatása ennek megváltoztatására nem kényszeríti. *

Ma már különösnek tűnik, de ez az állítás az egyik legforradalmibb gondolat volt a 17. században. A csaknem kétezer esztendőn át elfogadott arisztotelészi világkép ugyanis azt tartotta, hogy a testek csak akkor mozognak, ha erőhatás éri azokat, ennek hiányában a testek megállnak. Azt is mondhatjuk, hogy Arisztotelész szerint a testek természetes mozgásállapota a nyugalom, az összes többi mozgásállapotot valamilyen más test hatása kényszeríti ki. Eszerint az erő a mozgás *fenntartásához* szükséges, ebbe beleértve az egyenes vonalú egyenletes mozgást is. Newton annyiban haladta meg ezt a nézetet, hogy állítása szerint a testek természetes mozgásállapota nem csak a nyugalom, hanem az egyenes vonalú egyenletes mozgás is. Az erő tehát a *mozgásállapot megváltoztatásához* szükséges.

2.1.1. Definíció (Tömegpont mozgásállapota) Tömegpont esetén mozgásállapot alatt a test pillanatnyi sebességét értjük.

A "pillanatnyi sebesség" helyett a pontmechanikában azért használjuk gyakran a "mozgásállapot" kifejezést, mert ehhez fogalmilag hozzágondolunk olyan mennyiségeket is, amelyek a sebességből kiszámíthatók, de azzal nem azonosak (pl. a később szóba kerülő impulzust, mozgási energiát). Mondhatjuk ugyan, hogy a pillanatnyi sebesség és a mozgásállapot ebben a témakörben szinonímák, ugyanakkor a mozgásállapot kifejezésnek már itt is van egy olyan, dinamikával kapcsolatos fogalmi holdudvara, a mi a pillanatnyi sebesség fogalmának nincs. *Később, a pontrendszerek és a kiterjedt testek mechanikájában a két fogalom teljesen szétválik, egyáltalán nem szinonímák.* Egy kiterjedt testnek ugyanis több pontja is van, ezek sebessége különböző lehet, így a test egészének mozgásállapota a testet felépítő pontok sebességvektorainak (általában végtelen) halmazával jellemezhető. A mozgásállapot fogalmára építve a tehetetlenség törvénye megfogalmazható

így is: *"A testek nem képesek megváltoztatni saját mozgásállapotukat."*

2.1.2. Definíció (Tehetetlenség) Tehetetlenségnek nevezzük a testeknek azt a tulajdonságát, hogy saját mozgásállapotukat nem képesek megváltoztatni.

A tehetetlenség fogalmának felhasználásával a tehetetlenség törvénye még tömörebben fogalmazható meg: *"A testek tehetetlenek."* A 1. alaptétel szerinti megfogalmazás azért használatos és célszerű, mert kizárólag az ismertnek feltételezett kinematika fogalmaira épít, így nem igényel utólagos magyarázatot.

A tehetetlenség a testnek a maga mozgásállapotonak megváltoztatására való képtelenségén felül azt is kifejezi, hogy más testek mozgásállapot változtató hatásainak mennyire áll ellen. Minél nagyobb egy test tehetetlensége, annál nehezebb megváltoztatni a mozgásállapotát. Két különböző pontszerű test esetén a nagyobb tehetetlenségű testen ugyanaz a hatás kisebb mozgásállapot változást hoz létre.

A tehetetlenség mértéke a tömeg, jele m , mértékegysége a kg. A kilogramm jelenleg az egyetlen etalonnal definiált SI alapmértékegység. Törekvések vannak arra, hogy a definíciót a fizikai állandókra vezessék vissza.

A tehetetlenség törvényében szó esik az egyenes vonalú egyenletes mozgásról. Itt meg kell kérdeznünk, hogy mely vonatkoztatási rendszerhez (vagy koordináta-rendszerhez) viszonyítva ilyen a mozgás. Ismert, hogy az egyik koordináta-rendszerben egyenes vonalú egyenletes mozgás egy másikból már nem feltétlenül ilyennek látszik. Például a Földhöz viszonyítva egyenes vonalú egyenletes mozgást végző vonat mozgása már nem ilyen egy fékező autóból, vagy kanyarodó autóból, vagy körhintából szemlélve. Később visszatérünk e kérdéskörre, most csak annyit állapítunk meg, hogy nem minden koordináta-rendszerben igaz az, hogy egy test más testek hatása híján egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Másképp fogalmazva: nem minden koordináta-rendszerben igaz a tehetetlenség törvénye. Amelyekben igaz, azokat a koordináta-rendszereket külön névvel illetjük.

2.1.3. Definíció (Inerciarendszer) Inerciarendszernek nevezzük azt a vonatkoztatási rendszert (koordináta-rendszert), amelyben a tehetetlenség törvénye érvényes.

Általában azt lehet mondani, hogy a gyorsulásmentes koordináta-rendszerek inerciarendszerek (amelyeknek az origója állandó sebességgel mozog, és tengelyeik nem forognak). A Föld nem inerciarendszer, mert forog, és a Nap körül kering, de kis szögsebessége és pályájának kis görbülete miatt számos

műszaki feladatban jó közelítéssel inerciarendszerként használható. Az ún. állócsillagokhoz rögzített koordináta-rendszer közelebb áll az inerciarendszerhez, de nem az, mert az állócsillagoknak nevezett égitestek sem állandó sebességgel mozognak. A továbbiakban a Földet, ezzel együtt bármilyen Földhöz rögzített testet (épületet, állványt) hallgatólagosan inerciarendszernek tekintünk, ha ettől eltérünk, azt jelezni fogjuk.

A tehetetlenség törvényében előforduló "más testek hatása" kifejezés szinonimája az "erő". A testek egymásra gyakorolt mozgásállapot változtató hatását tapasztalati törvényekkel, az ún. erőtvörvényekkel írjuk le. Az erők hatását kifejező vektormennyiséget, az erővektort a tapasztalati képletekkel le lehet írni, azonban ezek az összefüggések nem adnak választ a "hogyan" kérdésre. Az erőtvörvények nem magyarázzák meg az erők hatásmechanizmusát, csupán leírják a hatást. Ez nagyon hasznos a fizikában és a műszaki tudományokban. Az erők hatásmechanizmusával a fizika más része foglalkozik. Az erőhatások működésének jelenlegi tudásunk szerinti leírását a standard modell és a relativitás elmélet adja meg.

A tehetetlenség törvénye egy pontszerű testre vonatkozó állítás. Később, a kiterjedt testek tárgyalásakor, szóba kerül majd a nem nulla kiterjedésű, de differenciálisan kicsi tömegelem, amelyre közvetlenül vonatkoztatni szokás a tehetetlenség törvényét. A kiterjedt testek egészére közvetlenül nem alkalmazható a tehetetlenség törvénye, de megalapozza az azokra vonatkozó törvényszerűségeket.

2.2. A mozgásmennyiség

Miután az első axióma összekapcsolta a mozgás létrehozásának nehézségét a tömeggel, megalapozza az egyik legfontosabb dinamikai mennyiség, az impulzus definícióját.

2.2.1. Definíció (Mozgásmennyiség, impulzus, lendület) A tömegpont impulzusa a tömeg és a sebesség szorzata:

$$\vec{I} = m\vec{v}. \quad (2.1)$$

A tömegpont impulzusának iránya mindig megegyezik a sebesség irányával.

Az impulzus idő szerinti deriváltja:

$$\dot{\vec{I}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a}. \quad (2.2)$$

Felhasználtuk, hogy a tömeg nem függ az időtől. Igen nagy (a fénysebességgel összemérhető) sebességek esetén az impulzus a sebességnek összetettebb függvénye, ezért az idő szerinti derivált nem az $m\vec{a}$ szorzat. Ilyen esettel itt nem foglalkozunk. A 2.2. összefüggést e jegyzetben mindig érvényesnek tekintjük.

2.3. A dinamika alapegyenlete

A dinamika alapegyenlete számításra alkalmas formába önti a tehetetlenség törvénye kapcsán bevezetett fogalmak kapcsolatát.

2. Axióma (Newton második törvénye, a dinamika alapegyenlete, a dinamika második axiómája).

A pontszerű test gyorsulása egyenesen arányos a rá ható erővel, és fordítottan arányos a test tömegével. A gyorsulás és az erő iránya megegyezik.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (2.3)$$

⊗

A második axióma szintén tömegpontra vonatkozik, ahogy az első is. Ezt az egyenletet az anyagi pont newtoni mozgásegyenletének nevezzük. A testre ható erő itt egyetlen erő. Később foglalkozunk azzal, hogy több erő együttes hatását hogy lehet egy erővel helyettesíteni.

A dinamika alapegyenletét Newton eredetileg a mozgásmennyiség segítségével fogalmazta meg:

A mozgásmennyiség idő szerinti deriváltja megegyezik a testre ható erővel:

$$\dot{\vec{I}} = \vec{F}. \quad (2.4)$$

Ez az összefüggés a 2.2. segítségével a 2.3. alakban is felírható.

Érdemes a dinamika alapegyenletében szereplő mennyiségek összefüggését megvizsgálni.

$$\vec{F} = \dot{\vec{I}} = m\vec{a} \quad (2.5)$$

Az eredő erő a környezet hatását írja le. Az $m\vec{a}$ mennyiséget a műszaki tudományban kinetikai vektornak is nevezik.

2.3.1. Definíció (Kinetikai vektor) A tömeg és a gyorsulásvektor szorzatát kinetikai vektornak is nevezik.

Ez a vektor mutatja meg azt, hogyan változik a mozgásállapota a testnek. A középben szereplő impulzus vektor köti össze a környezet hatását, mint okot a test mozgásállapotával, mint okozattal úgy, hogy tartalmazza a test tömegét is. Látjuk, hogy az impulzus vektor idő szerinti deriváltja egyenlő a kinetikai vektorral. Ez az egyenlőség sor két fontos állítást fejez ki. Az első, az erő és az impulzus derivált egyenlősége egy axióma, amit más állításokból már nem tudunk levezetni, hanem sok kísérlet és tapasztalat alapján elfogadjuk, hogy így van. A második, az impulzus derivált és a kinetikai vektor egyenlősége a definíciókból következik, és abból, hogy a tömeget állandónak tekintettük. Azért fontos mindkét egyenlőség, mert a lánc két végét szeretnénk összekötni. Mindkét egyenlőség által kifejezett állítás szükséges ahhoz, hogy a klasszikus mechanikában számításokkal kereshessük a választ a dinamika alapvető kérdéseire: milyen mozgást hoznak létre a környezet hatásai a tömegponton, vagy előírt mozgás létrehozásához milyen erők szükségesek. Az impulzus derivált olyan, mint egy összekötő kapocs az erők és a kinematikai mennyiségek között.

A gyorsulás definíció szerint a mozgástörvény idő szerinti második deriváltja. Az erő a vizsgálatok szerint a hely, a sebesség és az idő függvényeként adható meg, nem függ a helyvektor magasabb időderiváltjaitól. Ezért a dinamika alapegyenlete

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad (2.6)$$

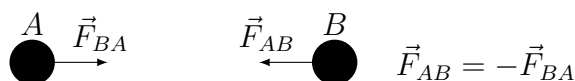
alakban is felírható. Ez egy közönséges másodrendű differenciálegyenlet, általános megoldása két független paramétert tartalmaz. A megoldásban szereplő paraméterek gyakran a kiindulási helyvektor (\vec{r}_0) és a kezdeti sebességvektor (\vec{v}_0). A 2.6. egyenlet általános megoldásának paraméterei nem mindig a kezdeti hely és sebességvektorok, de azzal kapcsolatba hozhatók. Ha adottak a 2.6. egyenlet, és azzal együtt az \vec{r}_0 , \vec{v}_0 paraméterek, a feladat neve kezdetiérték feladat, az \vec{r}_0 és \vec{v}_0 a kezdeti feltételek. A kezdetiérték feladatnak az $\vec{r}(t)$ függvény a megoldása. A legegyszerűbb ilyen típusú egyenletet már megoldottuk a kinematikában az állandó gyorsulású mozgás tárgyalásánál, csak ott a gyorsulást nem az erőből és a tömegből számítottuk ki, hanem adottnak feltételeztük ($\ddot{\vec{r}} = \vec{a} = \text{állandó}$). Az 2.6. típusú differenciálegyenlet megoldása és megoldhatósága az $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ függvényen múlik. Számos olyan erőtvény ismert, amely mellett a mozgásegyenlet nem oldható meg analitikusan, hanem numerikus módszerekkel közelíthető a megoldása.

2.4. A hatás-ellenhatás elve

3. Axióma (Newton harmadik törvénye, a hatás-ellenhatás elve, az akció–reakció elve, erő-ellenerő elve, a párkölcsönhatás elve, a dinamika harmadik axiómája).

Ha egy test erőhatást fejt ki egy másik testre, akkor a másik test is erőhatást gyakorol az egyik testre, a két erőhatás nagysága egyenlő, iránya ellentétes.

⊛



2.1. ábra. A hatás-ellenhatás elve

A hatás-ellenhatás elve jól szemléltethető úgy, hogy két, görkorcsolyán álló, kezükben egy kötél egy-egy végét tartó személy közül az egyik húzni kezdi a kötelet, mire mindketten mozgásba jönnek, ami Newton első törvénye szerint csak úgy lehet, hogy a kötelet húzó emberre is hat egy erő, ami épp ellentétes irányú azzal, amit ő kifejt. A két erő nagysága becsülhető abból, hogy mekkora gyorsulással mozog a két ember, ha tömegük közel egyenlő, akkor a közöttük levő távolság jó közelítéssel szimmetrikusan fog. Ugyan-ezen elv alapján mondható, hogy a szeg éppen akkorát üt a kalapácsra, mint a kalapács a szegre.

Az \vec{F}_{AB} erő és az \vec{F}_{BA} ellenerő *nem* ugyanarra a testre hatnak, hanem két különböző testre. Ezért az erő és az ellenerő soha nem hoznak létre egyenúlyt.

Mivel az erő és az ellenerő párhuzamosak, ezért a hatásvonaluk közös, és megegyezik a támadáspontjaikon (a két pontszerű testen) át fektetett egyenessel.

Igen nagy jelentősége van annak, hogy a két erő vektora ellentétes irányú, és egy egyenesbe esik. A pontrendszerek mechanikájában ebből számos fontos eredmény következik majd.

Ha az erő és az ellenerő nem esne egy egyenesbe, vagy nem lennének párhuzamosak, annak igen különös következményei lennének. Egy ilyen képzeletbeli világban például a fentebb említett kötelet húzó korcsolyázók nem csak közelednének, hanem keringeni kezdenének egymás körül (ha a korcsolya engedné). A rakéták és a repülő, de még az autók és a gyalogosok sem tudnának egyenesen menni. Számunkra teljesen idegen és kiszámíthatatlan lenne az

ilyen világ, szinte semmi sem úgy működne, ahogy megszoktuk, megismer-tük.

Ha egy erőhatással egyidejűleg nem lépne fel az ellenerő, akkor létezne első-fajú örökmozgó.

A hatás és ellenhatás egyidejű fellépéséből (3. axióma), valamint a dinamika alaptörvényéből (2.3. összefüggés) az is következik, hogy a testek *kölcsönösen* befolyásolják egymás mozgásállapotát. Ez nyilvánvaló akkor, amikor két biliárdgolyót látunk egymásnak ütközni, vagy a görkorcsolyás példában. Más esetekben kevésbé szembetűnő, de ugyanúgy érvényes. Például a szabadon eső testre a Föld nehézségi erőt fejt ki és ezáltal gyorsítja, ezzel együtt a szabadon eső test is ugyanolyan nagyságú és ellentétes irányú erőt fejt ki a Földre, miáltal gyorsítja a Földet. Azonban a Föld gyorsulása a Föld nagy tömege miatt oly kicsiny, hogy semmilyen műszerrel nem mutatható ki. A szabadon eső test és a Föld ugyanúgy *egymás felé és egyszerre* mozdulnak, mint a görkorcsolyás kísérlet szereplői.

Éppen ezért ne becsüljük alá ennek az alaptörvénynek a jelentőségét. A világunkban minden mozgásra érvényes, és mély összefüggésben áll a fizika szinte minden részterületével.

2.5. A szuperpozíció elve

4. Axióma (A szuperpozíció elve, az erők független összeadásának elve, a dinamika negyedik axiómája).

Ha egy tömegpontra egyidejűleg több erő is hat, akkor azok egymástól függetlenül fejtik ki hatásukat. ⊛

Ennek az axiómának a matematikai jelentése az, hogy az erők vektormennyiségek. Ha az erők nem egymástól függetlenül fejtenék ki a hatásukat, akkor nem lennének vektormennyiségek, nem is lehetne vektorként összeadni azokat. Ez az alapelv teszi lehetővé azt, hogy a második axiómában gyakran "erők eredőjét" mondanak.

A szuperpozíció elvének matematikai alakja a következő. Ha a tömegpontra egyidejűleg több, n db erő hat, melyeket külön-külön az $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ vektorokkal lehet jellemezni, akkor együttes hatásuk ugyanaz, mintha a tömegpontra egyedül csak az

$$\vec{F}_e = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (2.7)$$

eredő erő hatna.

2.6. A tömegpont mozgásegyenlete, a newtoni determináltság elve

A dinamika második és negyedik axiómái alapján egy tömegpont mozgásegyenlete a következő általános alakba írható:

$$\vec{F}_e = m\vec{a}, \quad (2.8)$$

vagy

$$\frac{1}{m} \sum_{i=0}^n \vec{F}_i(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \ddot{\vec{r}}. \quad (2.9)$$

Itt $\vec{F}_i(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ a tömegpontra egyidejűleg ható több erő egyikét jelenti.

Nagy jelentősége van annak a tapasztalatnak, hogy a tömegpont helye és sebessége egyértelműen meghatározza a gyorsulását. Ha ez nem így lenne, akkor a $\vec{F}_i(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)_i$ függvényekben a helyvektor magasabb deriváltjai is szerepelnének, ami rendkívül megnehezítené a mozgásegyenlet megoldásának (kezdetiérték feladat) sok esetben egyébként sem könnyű feladatát. Ezt a tényt úgy is szokás megfogalmazni, hogy a tömegpont mozgásállapotát egyértelműen lehet jellemezni a hely és a sebesség megadásával. Megint kicsit másképp fogalmazva ugyanez: ha ismerjük egy tömegpont helyét és sebességét, akkor minden más, rá jellemző mechanikai mennyiség kiszámítható (pl, gyorsulása, impulzusa, mozgási energiája stb.).

Ha ismerjük egy tömegpont helyét és a pillanatnyi sebességét, akkor a sebesség felhasználásával megadható a következő időpillanatbeli helyvektor. A helyvektornak ezt a megadása az infinitezimális mennyiségekkel való számolás (differenciál- és integrálszámítás) szabályai szerint történik. Leegyszerűsítve azt mondhatjuk, hogy a következő pillanatbeli helyvektort úgy kapjuk, hogy az eredeti helyvektorhoz hozzáadjuk a sebességvektornak és az infinitezimálisan kicsi (minden határnál kisebb, "nullához tartó") időtartam szorzatát. Ugyanígy megkapható egy következő, és ismét egy következő pillanatbeli helyvektor, ha ismerjük a sebességeket. A számítások során fontos kérdés, hogy mekkora legyen az a kicsi időtartam, amivel képzeletben előre léptetjük az időt, ugyanis számításokat csak véges mennyiségekkel tudunk elvégezni. E témával a numerikus analízis szép és terjedelmes témaköre foglalkozik részletesen.

A 2.9. mozgásegyenletből az is következik, hogy a tömegpont egy bizonyos pillanatbeli mozgásállapota a gyorsulással együtt meghatározza azt is, hogy a *következő pillanatban* mi lesz a sebességvektor (hiszen a gyorsulás a sebességvektor megváltozása). Ezek szerint ha egy bizonyos pillanatban ismert a sebesség és a hely, akkor a mozgásegyenlet segítségével kiszámítható egy

következő időpillanatbeli *hely és sebességvektor*. Ezek felhasználásával további pillanatokra is kiszámíthatók a hely és sebességvektorok, egészen végtelen nagy időintervallumban is, ha elegendően sokszor ismétljük ugyanezt. Mindebből az következik, hogy ha ismert egy pillanatban egy tömegpont helyvektora, sebességvektora, valamint a mozgása során a mozgástörvénye (2.9), akkor a teljes mozgás elvben leírható, és egyértelműen meghatározott. Ugyanezt sokkal pontosabban és részletesebben a matematika differenciál-számítással foglalkozó ága tárgyalja.

5. Axióma (A newtoni determináltság elve). *A tömegpont helye és sebessége minden pillanatban meghatározza a tömegpont gyorsulását.* \otimes

A newtoni determináltság elve tapasztalatokat összegez, nem következik semmilyen más alapelvből. Nem csak a természettudományban és a műszaki alkalmazásokban használjuk fel, hanem életműködésünk reflexei is erősen építenek erre, így vagyunk képesek járni, futni, egy követ célba dobni, járműveket vezetni, veszélyes helyzetek előtt kitérni. Ha a newtoni determináltság elve nem állna fenn, akkor a jelenlegitől drámaian eltérő világban kellene élnünk, ami nem is biztos, hogy lehetséges volna.

2.7. Erőtörvények

A lineáris rugalmas erő:

$$\vec{F}_r = -k\vec{r}, \quad (2.10)$$

ahol k a rugóállandó, \vec{r} az egyensúlyi helyzettől való kitérés vektora. A rugalmas erő egyenes mentén történő mozgás esetén az

$$F_r = -kx, \quad (2.11)$$

alakú koordináta-egyenlettel is megadható, ahol F az erő nagysága, x az egyensúlyi helyzettől való előjeles kitérés. Leolvasható az erőtvényből, hogy a rugalmas erő mindig az egyensúlyi helyzet felé mutat, oda akarja visszatéríteni a pontszerű testet, ezért visszatérítő erőnek is nevezik. Később látni fogjuk, hogy a lineáris rugalmas erő hatása alatt mozgó tömegpont harmonikus rezgőmozgást végez. Ezért a 2.10. törvénnyel megadható erőt harmonikus erőnek is nevezik.

A Föld felszínének közelében minden testre hat a nehézségi erő:

$$\vec{F}_g = m\vec{g}, \quad (2.12)$$

ahol \vec{g} a nehézségi gyorsulás vektora, melynek iránya közelítőleg a gömb alakúnak képzelt Föld középpontja felé mutat, nagysága $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. A nehézségi

gyorsulás nagysága nem mindenütt ugyanaz, helytől és időtől is függ. Változásai azonban olyan nagyságrendűek, hogy a hétköznapi számításokban azt nem kell figyelembe venni. A nehézségi gyorsulásra gyakran használjuk a $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ kerekített értéket.

A gravitációs erő:

$$\vec{F}_g = \gamma \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}, \quad (2.13)$$

ahol γ a gravitációs állandó, $\gamma = 6.67384 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$, m_1 és m_2 a testek tömege, \vec{r}_{12} a két pontszerű test relatív helyvektora.

A csúszási súrlódási erő:

$$\vec{F}_s = -\mu_s F_{ny} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \quad (2.14)$$

ahol \vec{v} a tömegpont és a vele érintkező felület relatív sebessége, μ_s a csúszási súrlódási együttható F_{ny} a felületeket összenyomó erő. A csúszási súrlódási erő mindig a relatív sebességgel ellentétes irányú, a sebesség nagyságától nem függ.

A tapadási súrlódási erő:

$$\vec{F}_t = -\mu_t F_{ny} \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|}, \quad (2.15)$$

ahol μ_t a csúszási súrlódási együttható F_{ny} a felületeket összenyomó erő, \vec{F} a test elmozdítására törekvő erő.

2.8. Munka, teljesítmény

Legyen $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ az $\vec{r} = \vec{r}(t)$ mozgástörvény szerint mozgó tömegpontra ható erő.

2.8.1. Definíció (Munka) Egy tömegpontra ható erő munkája a

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} \quad (2.16)$$

integrál. A munka mértékegysége: Nm = J (joule).

Az integrálást a kezdeti 1 jelű állapottól a 2 jelű végállapotig végezzük. Az 1 állapothoz tartozó időpont t_1 , a hely $\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1$, a 2 állapothoz tartozó

időpont és hely t_2 és $\vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$. A $d\vec{r}$ elemi elmozdulásvektor kifejezhető a pillanatnyi sebességgel: $d\vec{r} = \vec{v}dt$. Ezzel a 2.16. az alábbi alakba írható:

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \vec{v} dt. \quad (2.17)$$

2.8.2. Definíció (Pillanatnyi teljesítmény) A tömegpontra ható erő pillanatnyi teljesítménye

$$P = \vec{F} \vec{v}. \quad (2.18)$$

A pillanatnyi teljesítmény mértékegysége $\frac{\text{Nm}}{\text{s}} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W}$ (watt).

Mivel mind az erő, mind a sebesség pillanatról pillanatra változhat, a pillanatnyi teljesítmény is általában az idő függvénye: $P(t) = \vec{F}(t) \vec{v}(t)$. A pillanatnyi teljesítmény segítségével a munka így adható meg:

$$W_{12} = \int_1^2 P(t) dt. \quad (2.19)$$

Ha az erő állandó, a mozgás pedig s hosszúságú egyenes szakasz mentén megy végbe, akkor a munka

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \int_1^2 d\vec{r} = \vec{F} \Delta\vec{r} = F s \cos \alpha. \quad (2.20)$$

Az \vec{F} erő és az $\Delta\vec{r}$ elmozdulás vektorok által bezárt szög α . Ebben az esetben a pillanatnyi teljesítmény nem feltétlenül állandó, mert az egyenes szakasz mentén változó sebességgel is végighaladhat a tömegpont.

Ha az erő pillanatnyi teljesítménye állandó, akkor

$$W_{12} = \int_1^2 P dt = P \int_1^2 dt = P(t_2 - t_1) = P \Delta t. \quad (2.21)$$

Abból, hogy a pillanatnyi teljesítmény állandó a mozgás során, nem következik az, hogy az erő vektor állandó. Ez az eset megvalósulhat úgy is, hogy az erő és a sebesség vektorok éppen úgy változnak, hogy szorzatuk állandó marad.

2.9. Az energia

2.9.1. Definíció (Energia) Egy tömegpont energiája egy bizonyos állapotban megegyezik azzal a munkával, ami ahhoz szükséges, hogy a tömegpont egy viszonyítási (referencia) állapotból az aktuális állapotába kerüljön.

Az energia munkavégző képességet jelent. Egy magasba emelt test energiával, azaz munkavégző képességgel rendelkezik, mert egy csigán átvett kötél segítségével egy másik test felemelésére használható, miközben maga veszít a magasságából. A referencia állapot a talajszint, vagy más, előre kiválasztott magasság (pl. asztallap vagy tengerszint magassága).

Egy összenyomott rugó alkalmas arra, hogy más testre erőt kifejtve elmozdítsa azt, vagyis a 2.16. definíció szerint munkát végezzen rajta. Itt a referencia állapot a rugó nyújtatlan állapota.

Azt mondjuk, hogy az ilyen és hasonló esetekben a testnek a térben elfoglalt helye (helyzete) miatt van energiája, röviden helyzeti, vagy potenciális energiával rendelkezik.

A mozgó testnek is van energiája, mert alkalmas arra, hogy lefékeződve más testen munkát végezzen. Például egy mozgó test képes arra, hogy a talajon csúszva eltoljon egy másik, eredetileg álló testet egy ütközés során. Itt a munkavégzés az eredetileg álló test felgyorsítására irányul (ha van súrlódás, akkor annak legyőzésére is). Ebben az esetben a test a mozgásállapotából fakadóan rendelkezik energiával, azt mondjuk, hogy mozgási energiája van. A referencia állapot a nulla sebességű állapot, vagyis az álló helyzet.

2.10. A mozgási energia

2.10.1. Definíció (Tömegpont mozgási energiája) Az m tömegű tömegpont mozgási energiája v sebesség esetén megegyezik azzal a munkavégzéssel, ami ahhoz szükséges, hogy álló helyzetből a tömegpontot v sebességű mozgásba hozzuk. A tömegpont mozgási energiája

$$T = \frac{1}{2}mv^2. \quad (2.22)$$

2.10.1. Tétel (Tömegpont mozgási energiája) A tömegpont mozgási energiája $T = \frac{1}{2}mv^2$, ahol m a tömegpont tömege, v a tömegpont sebességének nagysága.

Bizonyítás. Először bizonyítsuk az állítást arra az egyszerű esetre, amikor állandó nagyságú F erővel gyorsítjuk a testet álló helyzetből v sebességre egyenes mentén. Ekkor $a = F/m$, a gyorsításhoz szükséges idő $\Delta t = v/a$, a pillanatnyi sebesség a t időpillanatban $v(t) = v = at$. Az 1 jelű állapot az

álló helyzet, a 2 jelű állapot a v nagyságú sebesség elérésének pillanata.

$$T = W_{12} = \int_1^2 F ds = F \int_1^2 ds = Fs = ma \cdot \frac{a}{2} t^2 = \frac{1}{2} m (at)^2 = \frac{1}{2} mv^2. \quad (2.23)$$

A bizonyítás az általános esetben is egyszerű, azaz ha az erő az időnek tetszőleges $\vec{F}(t)$ függvénye. Ekkor $\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{m}$. Érvényes $\vec{v}(t_1 = 0) = \vec{0}$ és $\vec{v}(t_2) = \vec{v}$.

$$\begin{aligned} T = W_{12} &= \int_1^2 \vec{F} d\vec{s} = \int_1^2 m \vec{a} \vec{v} dt = m \int_0^{t_2} \frac{1}{2} \frac{d\vec{v}^2}{dt} dt = \\ &= m \cdot \frac{1}{2} \cdot (\vec{v}^2(t_2) - \vec{v}^2(0)) = \frac{1}{2} mv^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

□

Nyilvánvaló, hogy $T(v = 0) = 0$.

2.11. A helyzeti energia, konzervatív erőterek

2.11.1. Definíció (Helyzeti energia) Egy tömegpont helyzeti energiája azaz a munkával egyenlő, amit a rá ható erőter véghez, miközben a tömegpont egy referencia helyről (viszonyítási hely, nullszint) az aktuális helyre kerül. A helyzeti energia másik nevei potenciális energia, potenciál.

A viszonyítási helyet jelölje a 0 pont, melynek helyvektora \vec{r}_0 , a tömegpont helye legyen az 1 jelű \vec{r}_1 helyvektorú pont, amelyben a potenciált meg kívánjuk határozni:

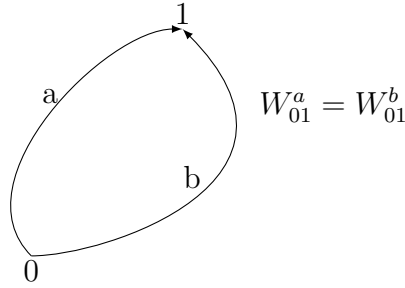
$$U(\vec{r}_1) = -W_{01} = - \int_0^1 \vec{F} d\vec{r}. \quad (2.25)$$

Ebből $U(\vec{r}_0) = 0$. A helyzeti energia akkor értelmezhető, ha értéke nem függ az időtől, és nem függ attól az úttól sem, amelyen végighaladva a referencia helyről az aktuális helyre vittük a tömegpontot. Ezért helyzeti energia csak időtől és sebességtől független erők esetén értelmezhető, azaz akkor, ha $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$.

2.11.2. Definíció (Konzervatív erőter) Konzervatívnak nevezzük az $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ erőteret, ha munkája nem függ a görbétől, amelyen a tömegpont végighalad, csak a kezdeti és a végpontoktól.

Helyzeti energia tehát csak konzervatív erőterekben értelmezhető. A konzervatív erőter másik, a fentivel ekvivalens megfogalmazása az, hogy tetszőleges zárt görbe mentén végzett munkája nulla. A potenciál 2.25. definíciójából következik, hogy annak negatív gradienseként megkapható a konzervatív erő:

$$-\text{grad}U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z\right) = -(-F_x\vec{e}_x - F_y\vec{e}_y - F_z\vec{e}_z) = \vec{F}. \quad (2.26)$$



2.2. ábra. A konzervatív erőter (0: a viszonyítási hely, nullszint)

2.11.3. Definíció (Mechanikai energia) Mechanikai energiának nevezzük a tömegpont mozgási és potenciális energiájának összegét.

$$E = T + U \quad (2.27)$$

2.11.1. Tétel (Mechanikai energia tétele) Konzervatív erőterben a mechanikai energia állandó.

Bizonyítás. A mechanikai energia idő szerinti deriváltját meghatározzuk, a potenciált közvetetten deriváljuk, és kihasználjuk a potenciál definícióját:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + U\right) = \frac{1}{2}m \cdot 2\vec{v}\vec{a} + \text{grad}U \cdot \dot{\vec{r}} = \underbrace{(m\vec{a} - \vec{F})}_{\text{Newton II.} \rightarrow 0} \cdot \dot{\vec{r}} = 0. \quad (2.28)$$

□

A mechanikai energia megmaradását sokszor a következő alakban írjuk:

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2, \quad (2.29)$$

ahol az 1 index az egyik, a 2 index egy másik időpillanatra vonatkozik.

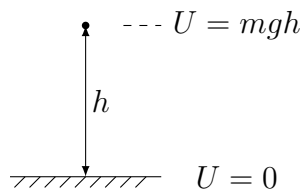
2.12. Példák potenciálra

Állandó erőterben ($\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_0 = \text{állandó}$) a potenciál

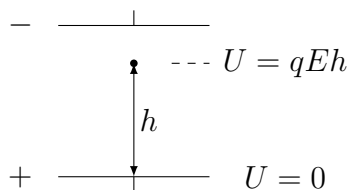
$$U = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_0 d\vec{r} = -\vec{F}_0 \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} = -\vec{F}_0(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\vec{F}_0 \Delta\vec{r} = -F_0 \cdot s \cdot \cos \alpha \quad (2.30)$$

itt $s = |\Delta\vec{r}|$, α az \vec{F}_0 erő és az elmozdulás által bezárt szög. Az $s \cdot \cos \alpha = h$ szorzat a nullszinttől mért távolság.

A nehézségi erőterben mozgó tömegpont helyzeti energiáját nullának tekintjük a referencia helyen, amely egy előre megadott magasság. Legyen például a talajszint a referencia magasság. A talajtól számított h magasságban levő, m tömegű pontszerű testre $F_0 = F_g = mg$ nagyságú nehézségi erő hat, így annak potenciálja $U = mgh$. A negatív előjel azért tűnik el, mert $\alpha = 180^\circ$, így $\cos \alpha = -1$. Állandó erőter potenciáljára egy másik példa a síkkondenzátor lemezei között kialakuló állandó E nagyságú elektromos térerősségű térrészben elhelyezkedő q elektromos töltés potenciálja, amely $U = qEh$, ahol h a ponttöltésnek a pozitív töltésű lemeztől mért távolsága. Ez a formula csak a két kondenzátorlemez között érvényes, a lemezek széléhez nem túl közel.



(a) Tömegpont potenciálja a nehézségi erőterben



(b) Ponttöltés potenciálja az állandó elektromos erőterben

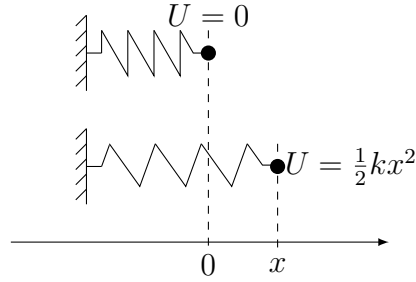
2.3. ábra. Állandó erőkerek potenciálja

A rugalmas erő potenciálja egydimenziós esetben:

$$U(x) = - \int_0^x F_r \cos(180^\circ) dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2. \quad (2.31)$$

2.13. A munkatétel

Az energiatételek közül már megismertük a mechanikai energia tételét, amely konzervatív erőkerekre áll fenn. A munkatétel általános érvényű, nem tar-



2.4. ábra. A rugalmas erő potenciálja

talmaz kikötést a tömegpontra ható erőkre vonatkozóan. Differenciális és integrál alakban is megfogalmazzuk.

2.13.1. Tétel (A munkatétel differenciális alakja) A tömegpontra ható erők pillanatnyi teljesítménye (P) egyenlő a mozgási energia idő szerinti deriváltjával (\dot{T} , pillanatnyi megváltozásával):

$$P = \dot{T}. \quad (2.32)$$

Ez a munkatétel differenciális alakja.

Bizonyítás. Induljunk ki a dinamika alapegyenletéből, és alakítsuk át:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad / \cdot \vec{v} \quad (2.33)$$

$$\vec{F}\vec{v} = m\vec{a}\vec{v} \quad (2.34)$$

$$P = \left(\frac{1}{2} m v^2 \right). \quad (2.35)$$

$$P = \dot{T} \quad (2.36)$$

□

A munkatétel differenciális alakja minden egyes időpillanatra érvényes. A P teljesítmény a pontszerű testre ható erők teljesítményének összege. Ha egyidejűleg n db erő fejt ki a hatását, akkor $P = \sum_{i=1}^n P_i$. Az erők teljesítményének összege egyenlő az erők eredőjének ($\vec{F}_e = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$) teljesítményével: $P = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \vec{v} = \vec{v} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{v} \vec{F}_e$, az igazolás során felhasználtuk a szuperpozíció elvét (a szuperpozíció elve nélkül az állítás nem lenne igaz).

2.13.2. Tétel (A munkatétel integrál alakja) A tömegpontra ható erők munkájának összege (W_{12}) egyenlő a tömegpont mozgási energiájának megváltozásával (ΔT):

$$W_{12} = T_2 - T_1 = \Delta T. \quad (2.37)$$

Ez a munkatétel integrál alakja.

Bizonyítás. A munkatétel differenciális alakjából indulunk ki:

$$P = \dot{T} \quad / \int_{t_1}^{t_2} \dots dt \quad (2.38)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{T} dt \quad (2.39)$$

$$W_{12} = T_2 - T_1 = \Delta T \quad (2.40)$$

□

A munkatétel integrál alakja mindig egy előre meghatározott $[t_1, t_2]$ időintervallumra vonatkozik. A superpozíció elvének segítségével a W_{12} mennyiségre könnyen megmutatható, hogy az az erők munkájának összegeként és az erők eredőjének munkájaként is felfogható:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{t_1}^{t_2} P dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} P_i dt = \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i \vec{v} dt}_{\text{az erők munkájának összege}} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \vec{v} dt = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_e \vec{v} dt}_{\text{az erők eredőjének munkája}}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

2.14. Számítási példák (tömegpont dinamikája)

2.14.1. Feladat. Egy $k = 5000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ rugóállandójú rugót $\Delta x = 10 \text{ cm}$ hosszúságban összenyomunk, ebben az állapotában rögzítjük, majd elé helyezünk egy pontszerűnek tekinthető, 50 g tömegű csapágygolyót, ebben a helyzetben a golyó éppen a talaj magasságában van. A rugó rögzítését kioldjuk, aminek következtében függőlegesen felfelé kilöki a golyót, ezt követően az a nehézségi erőtér hatása alatt mozog. Súrlódás nincs.

a) Milyen magasra emelkedik a golyó?

b) Mekkora sebességgel ér földet a golyó?

Megoldás

A golyóra a rugalmas erő és a nehézségi erő hat, melyek konzervatívak. Súrlódás nincs (elhanyagolhatónak tekintjük, azaz nem vesszük figyelembe a

légellenállást és a rugó anyagának belső súrlódását). Ezért a feladatot a mechanikai energia tételével meg lehet oldani. A magassági energia nullszintjét a talaj magasságában választjuk meg.

a) A rugó helyzeti energiája kezdetben $E_r = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}5000 \frac{\text{N}}{\text{m}}(0,1 \text{ m})^2 = 25 \text{ J}$. A rugó rögzítésének kioldása után a kilökés pillanatában a golyó v_0 sebességgel mozog. Ezt a sebességet megkaphatjuk, ha a mechanikai energia tétele alapján felírjuk az egyenlőséget az összenyomott és rögzített rugót tartalmazó rendszer (1. állapot) és a maximális magasságba emelkedett golyót tartalmazó rendszer (2. állapot) mechanikai energiája között. A mechanikai energia a helyzeti energia és a mozgási energia összege. A helyzeti energia több tag összegeként állhat elő.

$$E_{r1} + E_{g1} + E_{mozg1} = E_{r2} + E_{g2} + E_{mozg2} \quad (2.42)$$

E_r a rugó helyzeti energiája (az összenyomás miatt a rugóban tárolt energia), E_g a magassági energia, E_{mozg} a mozgási energia. A rugalmas energia a 2. állapotban már nulla, mert akkor a rugó összenyomottsága megszűnik ($\Delta x = 0$ lesz). A magassági energia az 1. állapotban nulla a nullszint megválasztása miatt. A golyó legnagyobb emelkedési magasságát jelölje h_{max} , ebben a helyzetben a magassági energia mgh_{max} . A mozgási energia a kilövés előtt nulla, a legnagyobb magasságban szintén nulla, hiszen ekkor egy pillanatra megáll a test, mielőtt lefele kezd esni.

$$\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 + mg0 + \frac{1}{2}m0^2 = \frac{1}{2}k0^2 + mgh_{max} + \frac{1}{2}m0^2 \quad (2.43)$$

$$\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = mgh_{max} \quad (2.44)$$

Ebből

$$h_{max} = \frac{5000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,1 \text{ m})^2}{2 \cdot 0,05 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 50 \text{ m}. \quad (2.45)$$

Figyeljük meg, hogy a 2. állapotban a magassági energia $E_{g2} = 0,05 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 50 \text{ m} = 25 \text{ J}$.

b) A harmadik állapot, amit vizsgálunk, a golyó földet érésének állapota. Felírjuk a mechanikai energia egyenlőségét a 2. és a 3. állapot között. A golyó sebessége földet éréskor v_f .

$$E_{r2} + E_{g2} + E_{mozg2} = E_{r3} + E_{g3} + E_{mozg3} \quad (2.46)$$

$$\frac{1}{2}k0^2 + mgh_{max} + \frac{1}{2}m0^2 = \frac{1}{2}k0^2 + mg0 + \frac{1}{2}mv_f^2 \quad (2.47)$$

Mivel a rugó a 2. és a 3. állapotban is nyújtatlan, a helyzeti energiája nulla, ki is lehetne hagyni ebből az egyenletből. A teljesség kedvéért vettük bele.

$$mgh_{max} = \frac{1}{2}mv_f^2 \quad (2.48)$$

Ebből

$$v_f = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,05 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 50 \text{ m}}{0,05 \text{ kg}}} = 31,62 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (2.49)$$

Figyeljük meg, hogy a 3. állapotban a golyó mozgási energiája $E_{mozg3} = \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}0,05 \text{ kg}(31,62 \text{ m})^2 = 25 \text{ J}$.

Azt is lehet mondani, hogy a kezdetben a rugóban tárolt 25 J energia a kilövés-kor mozgási energiává alakult, a legmagasabb pont elérésekor mind magassági energiává, majd a földetéréskor mind mozgási energiává alakult át.

✓

3.

Relatív mozgások: kinematika mozgó vonatkoztatási rendszerekben

Az arisztotelészi világkép szerint létezik olyan test, amely nyugalomban van: ez maga a Föld, amely a világmindenség középpontjában helyezkedik el. Ehhez viszonyítható minden mozgás. Amely test a Földhöz képest nem mozog, az nyugalomban van. Ez az elképzelés csaknem két évezredig volt elfogadott Európában.

A 17. században Galileo Galilei a *Dialogo* című művében érveket sorol fel amellet, hogy a Föld nem szükségképpen mozdulatlan. Gondolatmenetében rámutat, hogy az egymáshoz képest állandó sebességgel mozgó testekhez viszonyítva a természet jelenségei azonos módon játszódnak le, például az állandó sebességgel mozgó hajón vagy vonaton ugyanúgy zajlanak a jelenségek, mint a Földön. Kísérletekkel nem tudjuk eldönteni azt, hogy a jármű áll vagy állandó sebességgel mozog. Ebből az következik, hogy az abszolút nyugalom nem állapítható meg kísérletekkel, csupán az, hogy két test (viszonyítási rendszer) egymáshoz képes állandó sebességgel mozog vagy sem. Ugyanakkor a gyorsuló mozgást végző viszonyítási rendszerek megkülönböztethetők a nem gyorsuló rendszerektől kísérletekkel.

A témával kapcsolatos viták, kísérletek és kutatások nem csak az égitestek mozgásának jobb megértéséhez vezettek el, hanem megalapozták a mozgástan egyik legalapvetőbb témakörét: a testek mozgásának leírását más testekhez (vonatkoztatási rendszerekhez) képest.

E fejezetben célunk a tömegpont mozgásának leírása egymáshoz viszonyítva mozgó viszonyítási rendszerekben, továbbá a kapcsolat megállapítása az egyes leírások között.

Gondolatmenetünk a klasszikus mechanika témakörén belül marad, így fel-

tételezzük, hogy a sebességek, amelyekről beszélünk, elhanyagolhatóan kicsinyek a fénysebességhez képest. Ez a feltételezés a műszaki alkalmazások túlnyomó többségében érvényesnek tekinthető, hiszen a második kozmikus sebességgel (11.19 km/s) száguldó űrszonda is lassabban halad, mint a fénysebesség (kb. 300 000 km/s) 5 százaléka.

További fontos feltételezések e fejezetben belül, melyek kis sebességeknél elfogadhatók, hogy az idő azonos ütemben telik, valamint a távolság- és a tömegmérés azonos eredményt ad a különböző koordináta-rendszerekben.

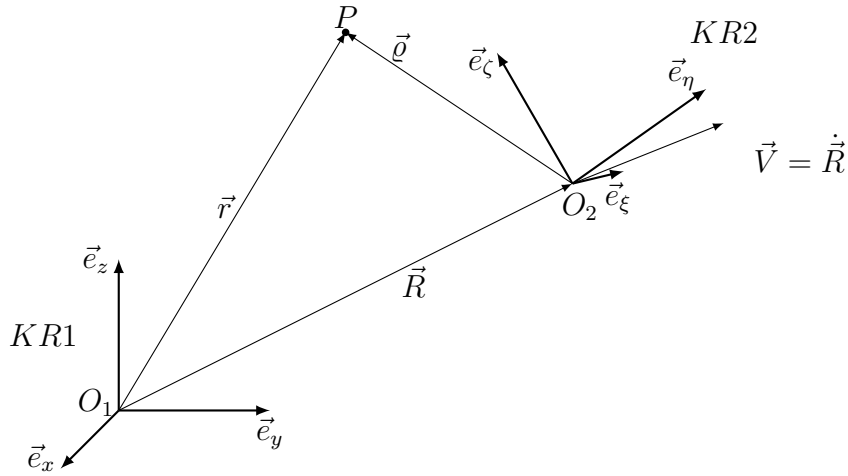
Vonatkoztatási rendszernek általában valós testeket választunk. Ezekhez koordináta-rendszereket rögzítünk úgy, hogy azok a testekkel együtt mozognak. Bár a koordináta-rendszerek képzeletbeli dolgok, más testek mozgása ugyanúgy zajlik a vonatkoztatási rendszerhez képest, mint a hozzá rögzített koordináta-rendszerhez képest. Amikor egy bizonyos koordináta-rendszerekhez viszonyított mozgásokról beszélünk, akkor egyszerre utalunk a viszonyítási rendszerre, amelyhez a koordináta-rendszert rögzítettük, és a koordináta-rendszer bázisvektoraira, amelyek a mozgás matematikai leírásának fontos segédeszközei.

A Galilei-féle relativitási elv kapcsán először egymáshoz viszonyítva speciálisan (nagyon egyszerűen) mozgó koordináta-rendszerekkel foglalkozunk, majd áttérünk az általános eset tárgyalására.

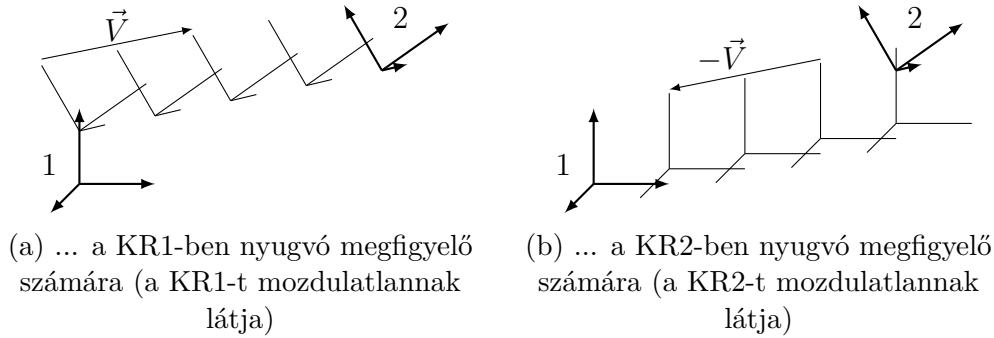
Itt érdemes feleleveníteni az inerciarendszer fogalmát (39. oldal).

3.1. Állandó sebességű relatív mozgások

Két viszonyítási rendszer (3.1. ábra), és az azokhoz rögzített két koordináta-rendszer (KR1, KR2) speciális relatív mozgását vizsgáljuk, amely során a tengelyek nem forognak, és a két origó viszonylagos sebessége állandó. Erre az esetre azt mondjuk, hogy a koordináta-rendszerek egyenes vonalú egyenletes translációt végeznek egymáshoz képest.



3.1. ábra. Egymáshoz képest egyenletes translációt végző koordináta-rendszerek



3.2. ábra. A koordináta-rendszerek mozgása ...

A KR1 és KR2 bázisvektorainak egymáshoz viszonyított iránya nem változik. Az O_2 helyvektora a KR1 rendszerben \vec{R} . A két koordináta-rendszer relatív sebessége a KR1-ben:

$$\dot{\vec{R}}(t) = \vec{V}(t) = \vec{V} = \text{állandó.} \quad (3.1)$$

Ebből az is következik, hogy

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V} \cdot t. \quad (3.2)$$

A P pont KR1-hez viszonyított helyvektora, sebességvektora és gyorsulásvektora rendre: $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$, a KR2-höz viszonyított helyvektora, sebességvektora

és gyorsulásvektora pedig rendre: $\vec{\varrho}, \vec{\beta}, \vec{\alpha}$. A P pont KR1-hez és KR2-höz viszonyított \vec{r} és $\vec{\varrho}$ helyvektorai között fennáll az alábbi összefüggés, melynek neve Galilei-transzformáció:

$$\vec{r} = \vec{\varrho} + \vec{R} = \vec{\varrho} + \vec{R}_0 + \vec{V} \cdot t. \quad (3.3)$$

A sebességeket megkaphatjuk az idő szerinti deriválással. Itt figyelembe kell venni a következőket. A KR1 és a KR2 bázisvektorai egymáshoz viszonyítva egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek, azaz sem nagyságuk, sem irányuk nem változik egymáshoz képest. Ebből az következik, hogy a KR1-ben nem csak az $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ vektorok állandók, hanem az $\{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\}$ vektorok is. A KR2-ben is állandó mind a hat bázisvektor. A P pont KR1-beli helyvektorának deriváltja a szorzat deriválási szabályai szerint az alábbi alakban írható:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{e}_x + x\dot{\vec{e}}_x + \dot{y}\vec{e}_y + y\dot{\vec{e}}_y + \dot{z}\vec{e}_z + z\dot{\vec{e}}_z, \quad (3.4)$$

mivel azonban a bázisvektorok időfüggetlenek, idő szerinti deriváltjaik nullák, az eredmény így egyszerűsödik:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z. \quad (3.5)$$

A P pont sebessége a KR2-höz viszonyítva a bázisvektorok állandósága miatt:

$$\vec{\beta} = \dot{\vec{\varrho}} = \dot{\xi}\vec{e}_\xi + \dot{\eta}\vec{e}_\eta + \dot{\zeta}\vec{e}_\zeta. \quad (3.6)$$

A 3.3. összefüggés idő szerinti deriválásával megkaphatjuk a Galilei-féle sebességösszeadási törvényt:

$$\vec{v} = \vec{\beta} + \vec{V}. \quad (3.7)$$

Természetesen fennáll

$$\vec{\beta} = \vec{v} - \vec{V} \quad (3.8)$$

is. A Galilei-féle sebességösszeadási törvénynek igen nagy a jelentősége. Számos, a későbbiekben is jól használható következtetést vonhatunk le abból.

A 3.7. összefüggés azt mutatja, hogy az egymáshoz képest egyenletesen mozgó koordináta-rendszerekben a mozgások jellege ugyanaz. Csupán a megfigyelt sebességek térnek el, az eltérés éppen a két koordináta-rendszer egymáshoz viszonyított sebességével egyezik meg. Ez azt jelenti, hogy az egyenes vonalú egyenletes mozgás mindkét KR-ből annak látszik azzal együtt, hogy a két különböző koordináta-rendszerből nézve más lehet a mozgás sebessége és a koordináta-rendszerhez viszonyított iránya is. A hajítás szintén hajítás, bármely KR-ből nézzük. (A helikoid mozgás is megőrzi jellegét abban az értelemben, hogy a menetemelkedés sebességével mozgó KR-ből körmozgásnak látszik, speciális esetben pedig cikloissá fajul.)

Ha $\vec{\beta} = \vec{0}$, vagyis a KR2-höz képest nem mozog a pont, akkor sebessége a KR1-hez viszonyítva a 3.7. összefüggés alapján $\vec{v} = \vec{V}$. Szemléletesen azt mondhatjuk, hogy a KR2-ben nyugvó pontot a KR2 magával viszi, szállítja. Ez a szóhasználat például abból ered, hogy a vonaton (KR2) ülő utas sebessége a Földhöz (KR1), vagy a Földön nyugvó fákhöz képest éppen ugyanaz, mint a vonat sebessége.

A sebességek idő szerinti deriválásával megkaphatók a gyorsulások, itt is kihasználjuk a bázisvektorok állandóságát.

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{\rho}} + \dot{\vec{V}} = \vec{a} \quad (3.9)$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{\beta}} = \dot{\vec{v}} - \dot{\vec{V}} = \vec{a} \quad (3.10)$$

Akármely koordináta-rendszerben végezzük tehát az idő szerinti deriválást, egymáshoz képest egyenletes transzlációt végző koordináta-rendszerek esetén azt kapjuk, hogy a P pont gyorsulása mindkét rendszerben ugyanaz:

$$\vec{a} = \vec{a}. \quad (3.11)$$

3.2. A Galilei-féle relativitási elv

Eddig ugyanazt a mozgást szemléltük két különböző koordináta-rendszerből. Az eddig elmondottakból kiindulva még egy fontos állítás megfogalmazható. Most azt vizsgáljuk, hogyan mozognak a különböző testek KR1-hez és KR2-höz viszonyítva, ha az egyes koordináta-rendszerekben azonos kezdőfeltételekkel indítjuk azokat. Ezt pontosan úgy értjük, hogy az egyik tömegpont mozgásának kezdeti feltételei a KR1-hez képest (\vec{r}_0 és \vec{v}_0) ugyanazok, mint egy másik test mozgásának kezdőfeltételei a KR2-höz képest ($\vec{\rho}_0$ és $\vec{\beta}_0$). A KR1 és a KR2 koordináta-rendszerekről továbbra is feltételezzük, hogy egyenes vonalú egyenletes transzlációt végeznek egymáshoz képest.

3.2.1. Tétel (Galilei-féle relativitási elv) A Galilei-féle relativitási elv: az egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes transzlációt végző koordináta-rendszerek a mechanikai jelenségek leírása szempontjából egyenértékűek.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a P tömegpontra ható, kölcsönhatásból származó ún. szabaderő \vec{F} (pl. nehézségi, gravitációs, rugalmas, elektrosztatikus, mágneses erőtvényekkel megadható erők, súrlódási és támasztóerők). A szabaderő csak a tömegpont *más testekhez (nem a koordináta-rendszerhez!)* viszonyított helyzetétől, sebességétől és az időtől függhet, és ezek a tényezők

mindkét koordináta-rendszerből (KR1 és KR2) szemlélve egyformák, ezért az \vec{F} szabaderő mindkét koordináta-rendszerben ugyanaz. Ebből, és a gyorsulások 3.11. egyenlőségéből az következik, hogy a dinamika alapegyenlete mindkét koordináta-rendszerben ugyanolyan alakú:

$$\text{A KR1-ben: } \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \quad (3.12)$$

$$\text{A KR2-ben: } \vec{F} = m\vec{\alpha} = m \frac{d^2\vec{\varrho}}{dt^2}. \quad (3.13)$$

Ennek további következménye az, hogy a mechanikai jelenségek mindkét koordináta-rendszerben azonos módon játszódnak le, hisz azok lefolyását a dinamika alapegyenlete határozza meg.

□

A 3.2.1. tétel azt jelenti például, hogy ha a KR1 origójából a KR1-hez viszonyítva kezdősebesség nélkül elengedünk egy pontszerű testet, akkor az szabadesést fog végezni, így mozgásegyenlete $\vec{r}(t) = \frac{\vec{g}}{2}t^2$ alakban adható meg, a KR2 origójából a KR2-höz viszonyítva kezdősebesség nélkül elengedett másik test mozgástörvénye pedig $\vec{\varrho}(t) = \frac{\vec{g}}{2}t^2$. Más szavakkal, Földhöz képest nyugvó megfigyelő azt látja, hogy az általa kezdősebesség nélkül elejtett test szabadesést végez, az egyenes vonalú egyenletes mozgást végző vonatban nyugvó megfigyelő az tapasztalja, hogy az általa kezdősebesség nélkül elejtett (másik) test szintén szabadesést végez a vonathoz viszonyítva. A Galilei-féle relativitási elvből következik, hogy egy inerciarendszerhez viszonyítva egyenes vonalú egyenletes translációt végző koordináta-rendszerek is inerciarendszerek. Ennek a következménynek még erősebb megfogalmazása a 73. oldalon olvasható 3.9.1. tétel.

3.3. Állandó relatív gyorsulású mozgások

Olyan koordináta-rendszerekben vizsgáljuk egy tömegpont mozgását, amelyek egymáshoz képest nem forognak, origójuk relatív mozgása egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás. Felhasználjuk a korábbi fejezetben bevezetett jelöléseket. Mivel a bázisvektorok iránya és nagysága még mindig állandó, az idő szerinti deriválások is ugyanúgy végezhetők el, ahogy eddig. Használjuk a 3.1. ábrát. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a KR1 inerciarendszer. A helyvektorok kapcsolata:

$$\vec{r} = \vec{\varrho} + \vec{R} = \vec{\varrho} + \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{A}}{2} t^2, \quad (3.14)$$

ahol \vec{V}_0 a koordináta-rendszerek relatív kezdősebessége, \vec{A} a relatív gyorsulás. Deriválással kapható a sebességvektorok és a gyorsulásvektorok közötti összefüggés:

$$\vec{v} = \vec{\beta} + \vec{V}_0 + \vec{A}t, \quad (3.15)$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} + \vec{A}. \quad (3.16)$$

Vizsgáljuk meg, hogy mozognak a tömegpontok a KR1 és KR2 koordináta-rendszerből megfigyelve. Az \vec{F} szabaderő továbbra is azonos a két rendszerben, a gyorsulások azonban eltérők. A KR1-ben a mozgásegyenlet:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (3.17)$$

a KR2-ben:

$$\vec{F} = m(\vec{\alpha} + \vec{A}) = m\vec{a} + m\vec{A}. \quad (3.18)$$

Átrendezéssel megkapjuk a KR2-beli gyorsulást:

$$\vec{F} - m\vec{A} = m\vec{a}. \quad (3.19)$$

A KR2-ben úgy tűnik, mintha az \vec{F} szabaderőn kívül fellépne egy másik $m\vec{A}$ erő, és e kettő eredője határozza meg az \vec{a} gyorsulást. Ha $\vec{F} = \vec{0}$, akkor a KR2 rendszerben a mozgásegyenlet

$$-m\vec{A} = m\vec{a} \quad (3.20)$$

alakú. Ez azt jelenti, hogy szabaderő jelenléte nélkül is gyorsul a test a KR2 koordináta-rendszerhez képest. Ez a furcsa jelenség érzékelhető, amikor a gyorsuló járműben az üléshez nyomja az utast egy olyan erő, amely álló járműben és állandó sebességgel haladó járműben nem lép fel. A jármű gyorsulásának iránya előre mutat, a gyorsuláskor fellépő erő pedig hátra. Ugyanez az erő lép fel fékezésakor is, de ellentétes irányban. A lift indulásakor és megállásakor is érzékeljük ugyanezt az erőt, de a lift állandó sebességű mozgása közben, vagy álló helyzetben nem. Az ilyen típusú látszólagos erőhatások neve: inerciaerő, vagy tehetetlenségi erő.

3.3.1. Definíció (Tehetetlenségi erő) Tehetetlenségi (inercia) erőnek nevezzük a gyorsuló koordináta-rendszerben felírt mozgásegyenletekben megjelenő, a koordináta-rendszernek egy másik koordináta-rendszerhez viszonyított mozgásállapotát megadó mennyiségeket tartalmazó tagokat.

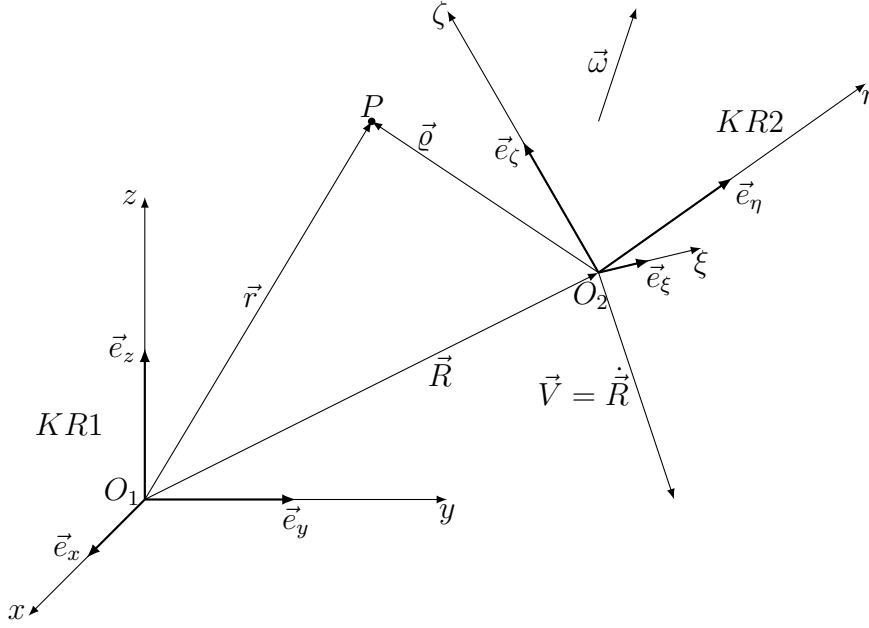
A tehetetlenségi erők a szabaderőkkel szemben nem valódi erőhatások. A helyes megértés érdekében tekintsük újra a gyorsuló jármű példáját. A jármű egyenes vonalú egyenletes gyorsulást végez \vec{A} gyorsulással. Ha a test

nincs a járműhöz rögzítve, akkor a járműhöz képest $-\vec{A}$ gyorsulással kezd mozogni. Ez a 3.20. egyenlet jelentése. Ez történhet például a vonat csúszós asztalkájára helyezett könyvvel, vagy az utasokkal is, ha nem ülnek, és nem kapaszkodnak. Ennek a *vonathoz viszonyított* gyorsuló mozgásnak az oka azonban nem egy valódi erőhatás, hanem az, hogy a jármű "kiszalad" a testek alól, a testek pedig a *Földhöz viszonyítva* mozdulatlanok maradnak (vagy csak kisebb gyorsulással kezdenek el mozogni), mert kellő rögzítés vagy megtámasztás híján nincs olyan erőhatás, ami azokat a járművel együtt gyorsítsa. Csak a járműhöz rögzített koordináta-rendszerben tűnik úgy, mintha egy hirtelen (az induláskor) megjelenő "rejtélyes" erő a tárgyakat egy irányba taszítaná. Ezért mondjuk, hogy az inerciaerők látszólagos erőhatások. Mégis használjuk azokat, mert segítségükkel igen hatékonyan írhatók le a gyorsuló koordináta-rendszerbeli mozgások. Később több inerciaerőt is megismerünk. A 3.19. egyenlet jelentése akkor érthető meg jól, ha azt kérdezzük, mi szükséges ahhoz, hogy a gyorsuló transzlációt végző koordináta-rendszerben egy test nyugalomban maradjon, azaz gyorsulása nulla legyen. Nyilván az $\vec{F} - m\vec{A} = \vec{0}$ egyenlőségnek kell teljesülnie. Ez azt jelenti, hogy biztosítani kell egy olyan szabaderőt, amely kiegyenlíti az inerciaerőt. Járművekben az utasok számára ezt az ülés háttámlája biztosítja, fékezéskor pedig a biztonsági öv, a járműben elhelyezett testek számára pedig a megfelelő rögzítés hozza létre ezt az erőt.

Éppen ez az, amiben tetten érhető az inerciarendszerek és a gyorsuló koordináta-rendszerek (azaz *nem* inerciarendszerek) közötti különbség. A gyorsuló koordináta-rendszerben nem érvényes a tehetetlenség törvénye. Az a tömegpont, amelyre nem hatnak szabaderők ($\vec{F} = \vec{0}$), a gyorsuló koordináta-rendszerben nem tartja meg mozgásállapotát (azaz sebessége nem állandó), hanem a *gyorsuló koordináta-rendszerhez viszonyítva* gyorsuló mozgást végez. Az inerciarendszerekben ellenben mindig érvényes a tehetetlenség törvénye: ha a tömegpontra nem hatnak szabaderők, akkor mozgásállapota (azaz sebessége) állandó. Ennek az elvnek a segítségével kísérleti úton meg lehet állapítani, hogy egy test (pl. a vonat, a hajó, a Föld) inerciarendszer vagy sem, akkor is, ha a környezet megfigyelésére nincs lehetőség.

3.4. Általános relatív mozgás

A viszonyítási rendszerek mozgása egymáshoz képest teljesen általános lehet. Ez azt jelenti, hogy az azokhoz rögzített két koordináta-rendszer origója egymáshoz viszonyítva tetszőlegesen mozoghat, ezen felül a koordináta-tengelyek egymáshoz viszonyítva foroghatnak.



3.3. ábra. Mozgó koordináta-rendszerek

A KR2 koordináta-rendszernek a KR1-hez viszonyított legáltalánosabb mozgását két fontos mennyiséggel írjuk le: a két origó relatív mozgástörvényével (a relatív helyvektor időfüggvényével) és a KR2-nek a KR1-hez viszonyított szögsebességével, amely szintén függhet az időtől. Az alábbi jelölések fontosak lesznek a továbbiakban. Az értelmezést segíti a 3.3. ábra.

Az O_2 origónak az O_1 -hez viszonyított helyvektora $\vec{R}(t)$, sebességvektora $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$, gyorsulása $\vec{A} = \dot{\vec{V}}$. A KR2 szögsebessége KR1-hez képest: $\vec{\omega}(t)$.

A KR1 bázisa az $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ ortonormált vektorhármas. A KR2 bázisa a $\{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\}$ ortonormált vektorhármas.

A P pontnak a KR1-beli helyvektora:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z, \quad (3.21)$$

mozgástörvénye:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z, \quad (3.22)$$

A P pont helyvektora és mozgástörvénye KR2-ben:

$$\vec{\rho} = \xi\vec{e}_\xi + \eta\vec{e}_\eta + \zeta\vec{e}_\zeta. \quad (3.23)$$

$$\vec{\rho}(t) = \xi(t)\vec{e}_\xi + \eta(t)\vec{e}_\eta + \zeta(t)\vec{e}_\zeta. \quad (3.24)$$

A mozgástörvények kapcsolata:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}. \quad (3.25)$$

Az idő szerinti deriválási műveleteket megkülönböztetjük aszerint, hogy a KR1-hez vagy a KR2-höz viszonyítjuk a változó mennyiséget. Mivel az általános relatív mozgás esetén a koordináta-rendszerek bázisvektorai már csak a saját rendszerükben állandók, az idő szerinti deriválás függ attól, hogy mely koordináta-rendszerben végezzük azt. A ponttal jelölt $\dot{\square}$ deriválás során a KR1 bázisvektorai állandók, a csillaggal jelölt $\overset{*}{\square}$ deriváláskor a KR2 bázisvektorai állandók. Ezért például $\dot{\vec{e}}_x = \vec{0}$, de $\dot{\vec{e}}_\xi \neq \vec{0}$ és $\overset{*}{\vec{e}}_x \neq \vec{0}$, de $\overset{*}{\vec{e}}_\xi = \vec{0}$. A P pont sebessége és gyorsulása a KR1-ben:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}, \quad (3.26)$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}. \quad (3.27)$$

A P pont sebessége és gyorsulása a KR2-ben:

$$\vec{\beta} = \overset{*}{\vec{\varrho}}, \quad (3.28)$$

$$\vec{\alpha} = \overset{*}{\vec{\beta}} = \overset{**}{\vec{\varrho}}. \quad (3.29)$$

A 3.1. táblázat összefoglalja a fontosabb jelöléseket.

	KR1	KR2
tengelyei	x, y, z	ξ, η, ζ
bázisvektorai	$\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$	$\{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\}$
origó mozgástörvénye a másik KR-hez viszonyítva		$\vec{R}(t)$
szögsebesség a másik KR-hez viszonyítva		$\vec{\omega}(t)$
szöggyorsulás a másik KR-hez viszonyítva		$\vec{\varepsilon}(t) = \dot{\vec{\omega}}(t)$
	a KR1-hez képest	a KR2-höz képest
a P helyvektora	\vec{r}	$\vec{\varrho}$
a P sebességvektora	\vec{v}	$\vec{\beta}$
a P gyorsulásvektora	\vec{a}	$\vec{\alpha}$
az idő szerinti deriválás	$\dot{\square}$	$\overset{*}{\square}$

3.1. táblázat. Jelölések a relatív mozgásokkal kapcsolatban

A táblázatban maradtak üres helyek. Ennek oka az, hogy először igyekszünk a legegyszerűbb jelölésrendszert használni. Később, a fizikai alapok

megismerését követően, kiegészítjük a jelöléseket, és általánosítjuk az eredményeket.

A műszaki szóhasználatban az egyik koordináta-rendszer általában a Földhöz, épülethez vagy egy gép állványához rögzített, a neve "abszolút" koordináta-rendszer (a 3.1. ábrán KR1), a másik, amely ehhez képest mozog (KR2) az ún. "relatív" koordináta-rendszer. Ezeknek az elnevezéseknek fizikai jelentése nincs, kizárólag a műszaki szóhasználatot tükrözik.

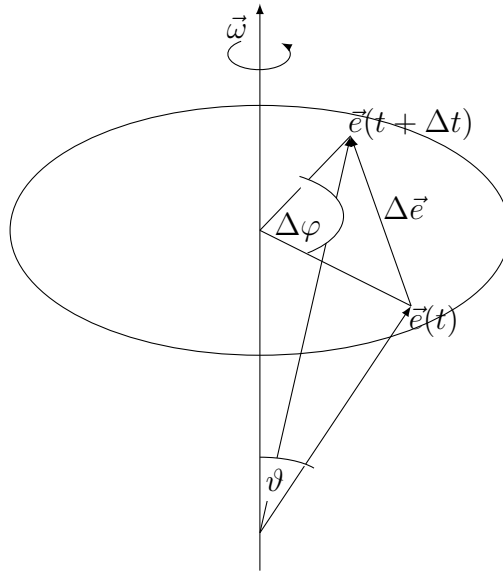
3.5. A forgó egységvektor

A KR1 koordináta-rendszerben az \vec{e} egységvektor forog $\vec{\omega}$ szögsebességgel. Célunk megadni az egységvektor idő szerinti megváltozásának gyorsaságát ("változási ütemét", időderiváltját). Az egységvektor hossza nem változik a forgás során

$$|\vec{e}| = 1 = \text{állandó.} \quad (3.30)$$

Az \vec{e} egységvektor az idő függvénye, a t időpillanatban értéke $\vec{e}(t)$, egy későbbi $t + \Delta t$ időpontban $\vec{e}(t + \Delta t)$. A Δt idő alatt az egységvektor megváltozása

$$\Delta \vec{e} = \vec{e}(t + \Delta t) - \vec{e}(t). \quad (3.31)$$



3.4. ábra. A forgó egységvektor

A φ szög megváltozása a szögsebesség nagysága:

$$\dot{\varphi} = \omega. \quad (3.32)$$

Ha a Δt időtartam kicsiny, akkor az egységvektor megváltozásának nagysága közelíthető a hozzátartozó körív hosszával:

$$|\Delta \vec{e}| \approx |\vec{e}| \cdot \sin \vartheta \cdot \Delta \varphi, \quad (3.33)$$

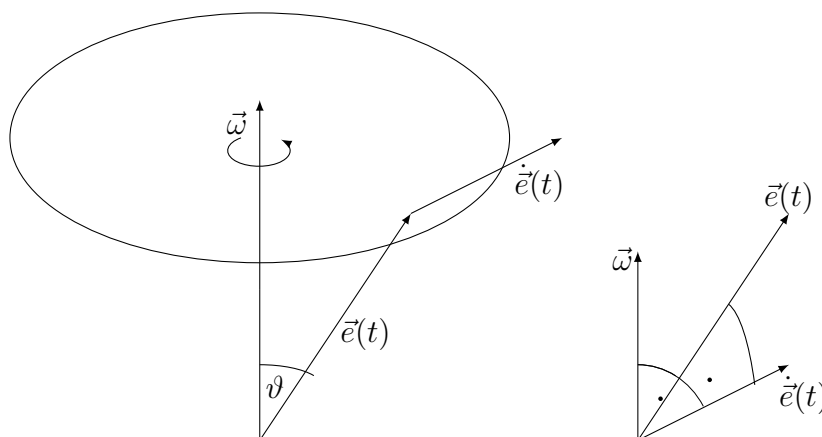
összük el mindkét oldalt Δt -vel, majd vegyük ennek határértékét a $\Delta t \rightarrow 0$, ekkor ez a közelítés egyenlőségbe megy át:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{e}|}{\Delta t} = \underbrace{|\vec{e}|}_1 \sin \vartheta \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \varphi|}{\Delta t}, \quad (3.34)$$

$$|\dot{\vec{e}}| = \sin \vartheta \cdot \dot{\varphi} = \sin \vartheta \cdot \omega. \quad (3.35)$$

A jobb oldal éppen az $\vec{\omega} \times \vec{e}$ szorzat nagysága. Határértékben a $\Delta \vec{e}$ iránya megegyezik az $\vec{e}(t)$ végpontjához húzott érintő irányával, ami azonos az előbb említett vektori szorzat irányával. Ezért a forgó egységvektor idő szerinti deriváltja a következőképpen adható meg:

$$\dot{\vec{e}} = \vec{\omega} \times \vec{e}. \quad (3.36)$$



3.5. ábra. A forgó egységvektor idő szerinti deriváltja

3.6. Vektor időderiváltja forgó rendszerben

Legyen a KR2 a KR1 rendszerhez képest $\vec{\omega}$ szögsebességgel forgó koordináta-rendszer. Legyen \vec{B} egy tetszőleges fizikai mennyiség (pl. hely, sebesség, elektromos térerősség stb.) vektora. Megvizsgáljuk, milyen kapcsolatba áll ennek a vektornak a KR1-beli és KR2-beli idő szerinti deriváltja.

A \vec{B} kifejezhető a KR1 és a KR2 koordináta-rendszerben is:

$$\vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z, \quad (3.37)$$

$$\vec{B} = B_\xi \vec{e}_\xi + B_\eta \vec{e}_\eta + B_\zeta \vec{e}_\zeta. \quad (3.38)$$

Ne feledjük, hogy a fizikai mennyiségek általában, így a vektormennyiségek is, koordináta-rendszertől függetlenek. Például a hely, a sebesség, az elektromos térerősség nem függenek attól, hogy mely koordináta-rendszerben adjuk meg azokat. Ezért a 3.37. és a 3.38. egyenlőségek *ugyanazt* a \vec{B} vektort adják meg két különböző koordináta-rendszerben.

A \vec{B} idő szerinti deriváltja a KR1 koordináta-rendszerben megadható a 3.37. és a 3.38. formula deriválásával is:

$$\dot{\vec{B}} = \dot{B}_x \vec{e}_x + \dot{B}_y \vec{e}_y + \dot{B}_z \vec{e}_z \quad (3.39)$$

$$\dot{\vec{B}} = \underbrace{\dot{B}_\xi \vec{e}_\xi + \dot{B}_\eta \vec{e}_\eta + \dot{B}_\zeta \vec{e}_\zeta}_{\vec{B}^*} + B_\xi \dot{\vec{e}}_\xi + B_\eta \dot{\vec{e}}_\eta + B_\zeta \dot{\vec{e}}_\zeta = \quad (3.40)$$

$$= \vec{B}^* + B_\xi \vec{\omega} \times \vec{e}_\xi + B_\eta \vec{\omega} \times \vec{e}_\eta + B_\zeta \vec{\omega} \times \vec{e}_\zeta = \quad (3.41)$$

$$= \vec{B}^* + \vec{\omega} \times \underbrace{(B_\xi \vec{e}_\xi + B_\eta \vec{e}_\eta + B_\zeta \vec{e}_\zeta)}_{\vec{B}} = \vec{B}^* + \vec{\omega} \times \vec{B}. \quad (3.42)$$

Összefoglalva:

$$\dot{\vec{B}} = \vec{B}^* + \vec{\omega} \times \vec{B}. \quad (3.43)$$

Egy fizikai mennyiség időderiváltja kifejezhető a relatív forgómozgást végző rendszerben elvégzett időderivált (\vec{B}^*) és a koordináta-rendszerek relatív szögsebessége segítségével. Ez az összefüggés mutatja meg azt, hogy a vektormennyiségek egymáshoz képest forgómozgást végző koordináta-rendszerekben elvégzett idő szerinti deriváltjai milyen kapcsolatban állnak egymással.

Szemléletesen azt mondhatjuk, hogy a KR1-beli derivált megkapható a mennyiség a KR2-hez viszonyított deriváltjának és a KR2 elfordulásából adódó megváltozásnak az összegeként. Ha a \vec{B} vektor a KR2-ben állandó lenne (ekkor

$\vec{B}^* = \vec{0}$), a KR1-hez viszonyítva akkor is mozog, mégpedig éppen azért, mert a KR2-vel együtt forog. Ezt fejezi ki a 3.43. összefüggésben az $\vec{\omega} \times \vec{B}$ tag. Fontos, hogy a 3.43. összefüggés még mindig koordináta-rendszertől független. Igaz, relatív változási gyorsaságokat tartalmaz, de ezek a relatív mennyiségek megadhatók bármely koordináta-rendszerben. Azt, hogy milyen koordináta-rendszerben adjuk meg e vektorokat, a feladatok megoldásakor kell eldönteni. Úgy kell majd felvenni a koordináta-rendszereket, hogy a matematikai műveletek a legegyszerűbbek legyenek.

3.7. Kinematika általánosan mozgó rendszerekben

Használjuk a 3.3. ábrát. A KR1-hez képest általánosan mozgó KR2 szögsebessége $\vec{\omega}$, origójának mozgástörvénye $\vec{R}(t)$. A helyvektorok közötti összefüggés:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\varrho}. \quad (3.44)$$

A sebességvektorok közötti összefüggés $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{\varrho}} = \vec{V} + \vec{\varrho}^* + \vec{\omega} \times \vec{\varrho} = \vec{V} + \vec{\beta} + \vec{\omega} \times \vec{\varrho}$ (a 3.43. összefüggés felhasználásával) így írható:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\beta} + \vec{\omega} \times \vec{\varrho}. \quad (3.45)$$

Ha a tömegpont a KR2-ben nyugszik, azaz $\vec{\beta} = \vec{0}$, a KR1-hez képest akkor is mozog $\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{\varrho}$ sebességgel, szemléletesen a KR2 "magával viszi", "szállítja" a hozzá visznyítva nyugvó tömegpontot.

3.7.1. Definíció (Szállítósebesség) Szállítósebesség: a KR2 rendszer szállítósebessége a KR1-hez viszonyítva

$$\vec{v}_{sz} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{\varrho}, \quad (3.46)$$

ha a KR2 origójának sebessége \vec{V} és a KR2 szögsebessége $\vec{\omega}$ a KR1-hez képest.

A két koordináta-rendszerben számított sebességek kapcsolata tehát:

$$\vec{v} = \vec{v}_{sz} + \vec{\beta}. \quad (3.47)$$

A gyorsulások kapcsolatának meghatározásához a 3.45. összefüggést derivál-

juk az idő szerint.

$$\dot{\vec{v}} = \vec{a} = \dot{\vec{V}} + \dot{\vec{\beta}} + (\vec{\omega} \times \vec{\varrho}) = \quad (3.48)$$

$$= \vec{A} + \dot{\vec{\beta}} + \vec{\omega} \times \vec{\beta} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\varrho} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\varrho}} = \quad (3.49)$$

$$= \vec{A} + \vec{\alpha} + \vec{\omega} \times \vec{\beta} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\varrho} + \vec{\omega} \times \underbrace{\left(\dot{\vec{\varrho}} \right)}_{\dot{\vec{\beta}}} + \vec{\omega} \times \vec{\varrho} = \quad (3.50)$$

$$\vec{A} + \vec{\alpha} + \vec{\omega} \times \vec{\beta} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\varrho} + \vec{\omega} \times \vec{\beta} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\varrho}) = \quad (3.51)$$

$$\vec{A} + \vec{\alpha} + 2\vec{\omega} \times \vec{\beta} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\varrho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\varrho}) \quad (3.52)$$

Összefoglalva és rendezve:

$$\vec{a} = \vec{A} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\varrho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\varrho}) + 2\vec{\omega} \times \vec{\beta} + \vec{\alpha}. \quad (3.53)$$

3.7.2. Definíció (Coriolis-gyorsulás) Az $\vec{\omega}$ szögsebességgel forgó koordináta-rendszerben a $\vec{\beta}$ sebességgel haladó tömegpont esetén a Coriolis-gyorsulás:

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{\beta}. \quad (3.54)$$

3.7.3. Definíció (Centrifugális gyorsulás) Az $\vec{\omega}$ szögsebességgel forgó koordináta-rendszerben a centrifugális gyorsulás

$$\vec{a}_{cf} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\varrho}). \quad (3.55)$$

3.7.4. Definíció (Szállítógyorsulás) Szállítógyorsulás: a KR2 rendszer szállítógyorsulása a KR1-hez viszonyítva

$$\vec{a}_{sz} = \vec{A} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\varrho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\varrho}), \quad (3.56)$$

ha a KR2 origójának gyorsulása \vec{A} , a KR2 szögsebessége $\vec{\omega}$ és szöggyorsulása $\vec{\varepsilon}$ a KR1-hez képest.

A tömegpont KR1-beli és KR2-beli gyorsulásvektorai közötti összefüggés ezekkel így írható:

$$\vec{a} = \vec{a}_{sz} + \vec{a}_C + \vec{\alpha}. \quad (3.57)$$

Történeti okokból a Coriolis-gyorsulás nevű tag nem szerepel a szállítógyorsulásban. Pedig, ha a tömegpont gyorsulása a KR2-höz viszonyítva nulla ($\vec{\alpha} = \vec{0}$), akkor a KR1-hez viszonyított gyorsulása nem \vec{a}_{sz} , hanem $\vec{a}_{sz} + \vec{a}_C$. A Coriolis-gyorsulás a forgó Földön a többi taghoz viszonyítva nagy, ebből ered jelentősége.

3.8. Dinamika általánosan mozgó rendszerekben

A dinamika alapegyenlete inerciarendszerben $\vec{F} = m\vec{a}$. Egy inerciarendszerhez képest általános mozgást végző koordináta-rendszer esetén ez az egyenlet így írható a 3.53. összefüggés felhasználásával:

$$\vec{F} = m(\vec{A} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\varrho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\varrho}) + 2\vec{\omega} \times \vec{\beta} + \vec{\alpha}), \quad (3.58)$$

átrendezve:

$$\vec{F} - m\vec{A} - m\vec{\varepsilon} \times \vec{\varrho} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\varrho}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{\beta} = m\vec{\alpha}. \quad (3.59)$$

A 3.59. egyenlet bal oldalán szereplő, tömeget és a KR2-nek a KR1-hez viszonyított mozgását jellemző mennyiségeket tartalmazó tagok a tehetetlenségi (inercia) erők (ld. 3.3.1. definíció, 63. oldal).

3.8.1. Definíció (Coriolis-erő) A Coriolis-erő:

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{\beta}. \quad (3.60)$$

3.8.2. Definíció (Centrifugális erő) A centrifugális erő:

$$\vec{F}_{cf} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\varrho}). \quad (3.61)$$

3.8.3. Definíció (Euler-erő) Az Euler-erő:

$$\vec{F}_{Euler} = -m\vec{A} - m\vec{\varepsilon} \times \vec{\varrho}. \quad (3.62)$$

A gyorsuló mozgást végző koordináta-rendszerek az inerciaerők jelenlétéről ismerhetők fel. A bevezetett jelölésekkel gyorsuló koordináta-rendszerben a 3.59. mozgásegyenlet így is írható:

$$\vec{F} + \vec{F}_C + \vec{F}_{cf} + \vec{F}_{Euler} = m\vec{a}. \quad (3.63)$$

3.9. Inerciarendszerek relatív mozgása

Az eddigiek alapján kimondható az alábbi fontos tétel.

3.9.1. Tétel (Inerciarendszerek relatív mozgása) Minden inerciarendszer egyenes vonalú egyenletes transzlációt végez bármely más inerciarendszerhez viszonyítva.

Bizonyítás. A bizonyítást két irányban kell elvégezni.

Meg kell mutatni, hogy ha IR1 inerciarendszer, és IR2 egyenes vonalú egyenletes transzlációt végez hozzá viszonyítva, akkor IR2 is inerciarendszer. Ez következik a Galilei-féle relativitási elvből (3.2.1. tétel).

Másrészt azt kell belátni, hogy ha IR1 és IR2 egyaránt inerciarendszerek, akkor biztosan egyenes vonalú egyenletes transzlációt végeznek egymáshoz viszonyítva. Ez indirekt módon bizonyítható. Ha IR1 inerciarendszer, és IR2 gyorsuló mozgást végezne hozzá képest, akkor IR2-ben a mozgásegyenlet nem $\vec{F} = m\vec{a}$ alakú, hanem 3.59. alakú, így IR2 nem lehetne inerciarendszer. Ebből következik, hogy két inerciarendszer relatív mozgása csak egyenes vonalú egyenletes transzláció lehet. \square

Gondolkodtató kérdések

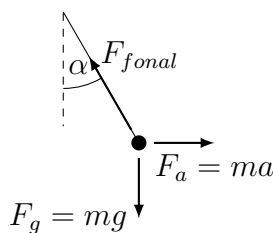
1. Mekkora szöveget zár be a függőlegessel a Földön vízszintes egyenes mentén egyenletesen gyorsuló mozgást végző vonat menyezetéhez rögzített, nyugvó matematikai inga? A gyorsulás nagysága a .
2. Mekkora a Föld szögsebességének nagysága? Változik-e, és ha igen, mekkora lehet a Föld szöggyorsulásának nagysága?
3. Az előző kérdésre adott válaszok alapján indokolja, hogy a forgó Földön megvalósuló "szokásos" mozgások esetén miért nagy a 3.53. összefüggésben a Coriolis-gyorsulás a többi taghoz képest, és ezzel együtt a 3.59. egyenlőségben a Coriolis-erő a többi inerciaerőhöz képest!

3.10. Számítási példák (relatív mozgás)

3.10.1. Feladat. Tervezzon olyan eszközt, amelynek segítségével egy vízszintes talajon egyenes vonalú egyenletesen változó mozgást végző vonat gyorsulásának mérését szögmérésre lehet visszavezetni!

Megoldás

Az a gyorsulással mozgó vonatban egy m tömegű anyagi pontra $F_a = ma$ nagyságú tehetetlenségi erő hat a gyorsulással ellentétes irányban. Egy anyagi pontból készítsünk matematikai ingát (fonálingát)! Például egy kis csavaranyára kössünk cérnát, és a cérna végét rögzítsük a fej fölötti csomagtartóhoz. Még a vonat álló (vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végző) állapotában rögzítsünk szögmérőt az inga mögé. Ha a vonat gyorsul vagy lassul, a fonálinga kitér, a kitérés szögét leolvashatjuk. Adjuk meg, hogyan kapható meg a leolvasott szög értékéből a vonat gyorsulása!



3.6. ábra. Az inga helyzete és a rá ható erők a gyorsuló vonatban

Az erők egyensúlyából

$$mg = F_{fonal} \cdot \cos \alpha, \quad ma = F_{fonal} \cdot \sin \alpha \quad (3.64)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{g} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (3.65)$$

$$\Rightarrow a = g \tan \alpha \quad (3.66)$$

✓

4.

Pontrendszerek dinamikája

A pontrendszerek dinamikája érdekes és fontos fejezete a mechanikának. Ennek segítségével jól tárgyalható például a bolygók mozgása, a nagy részecskeszámú rendszerek (pl. gázok), vagy bizonyos több testből álló rezgő rendszerek viselkedése. Ennek a fejezetnek a célja, hogy a pontrendszerek dinamikájának alapfogalmait megismerve előkészítsük a merev testek dinamikáját.

4.1. A pontrendszer

4.1.1. Definíció (Pontrendszer) Pontrendszernek nevezzük azt a mechanikai rendszert, amely kizárólag tömegpontokból áll.

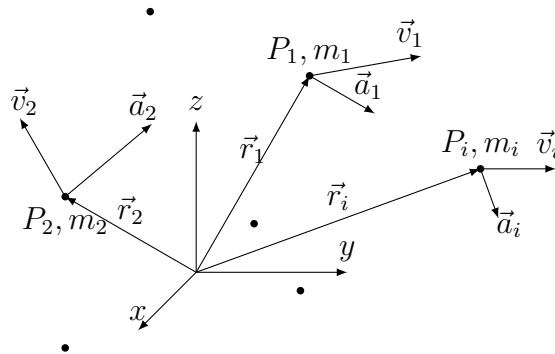
Ez a definíció általános, nem tartalmazza a merevség feltételét, tehát ebben a fejezetben olyan pontrendszerekről esik szó, amelyekben a tömegpontok egymáshoz képest tetszőlegesen mozoghatnak, azaz egymástól mért távolságuk *nem* állandó.

A pontrendszereket jellemző mennyiségek szoros analógiát mutatnak a tömegpontok jellemzésére használt mennyiségekkel. A rendszerben található minden egyes tömegpontnak van helyvektora, tömege, sebessége, gyorsulása, impulzusa, mozgási és helyzeti energiája, impulzusnyomatéka. A rendszerre jellemző mennyiségek gyakran ezek összegzésével állnak elő. Legyen a pontrendszert alkotó tömegpontok száma n , a tömegpontok halmaza: $\{P_1, P_2, \dots, P_n\} = \{P_i\}_{i=1..n}$. A következő jelöléseket fogjuk használni:

A tömegpontok helyvektorai:	$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n.$
A tömegpontok tömegei:	$m_1, m_2, \dots, m_n.$
A tömegpontok statikai nyomatékai:	$\vec{S}_1, \vec{S}_2, \dots, \vec{S}_n.$
A tömegpontok sebességvektorai:	$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n.$
A tömegpontok gyorsulásvektorai:	$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n.$
A tömegpontok impulzusa:	$\vec{I}_1, \vec{I}_2, \dots, \vec{I}_n.$
A tömegpontok mozgási energiája:	$T_1, T_2, \dots, T_3.$
A tömegpontok helyzeti energiája:	$U_1, U_2, \dots, U_3.$
A tömegpontok impulzusnyomatéka:	$\vec{N}_1, \vec{N}_2, \dots, \vec{N}_n.$

A pontrendszer egészét jellemző mennyiségek:

A pontrendszer tömege:	$m = \sum_{i=1}^n m_i.$
A pontrendszer statikai nyomatéka	$\vec{S} = \sum_{i=1}^n \vec{S}_i.$
A pontrendszer impulzusa:	$\vec{I} = \sum_{i=1}^n \vec{I}_i.$
A pontrendszer mozgási energiája:	$T = \sum_{i=1}^n T_i.$
A pontrendszer helyzeti energiája:	$U = \sum_{i=1}^n U_i.$
A pontrendszer impulzusnyomatéka:	$\vec{N} = \sum_{i=1}^n \vec{N}_i.$



4.1. ábra. A pontrendszer megadása

4.2. Statikai nyomaték, tömegközéppont

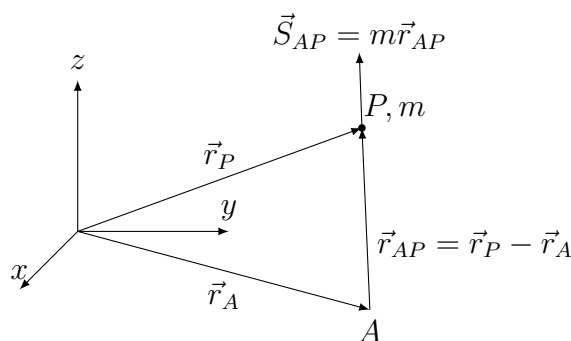
Emlékeztetőül idézzük fel egy tömegpont statikai nyomatékának fogalmát (statikából már tanultuk).

4.2.1. Definíció (Tömegpont statikai nyomatéka) Egy P tömegpont A pontra vonatkozó statikai nyomatéka a tömegének és A ponthoz viszonyított

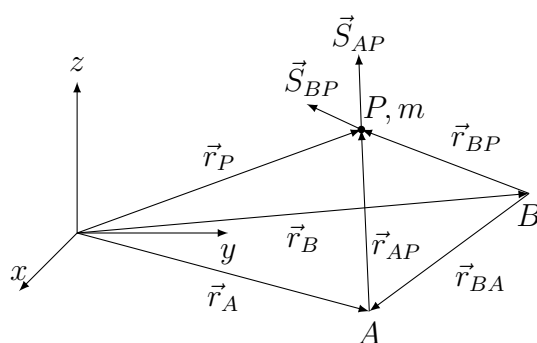
relatív helyvektorának szorzata, a jele \vec{S}_A

$$\vec{S}_{AP} = m\vec{r}_{AP} = m(\vec{r}_P - \vec{r}_A). \quad (4.1)$$

A statikai nyomaték vektormennyiség, a mértékegysége kgm. A tömegpont statikai nyomatékának iránya megegyezik a vonatkoztatási pontból (A) a tömegponthoz (P) mutató relatív helyvektor irányával. A statikai nyomaték függ attól, hogy mely pontra számítjuk, ezért általában $\vec{S}_A \neq \vec{S}_B$, ha A és B a tér különböző pontjai.



4.2. ábra. A tömegpont statikai nyomatéka



4.3. ábra. A tömegpont két különböző pontra vonatkozó statikai nyomatéka, figyeljük meg: $\vec{r}_{BP} = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{AP}$

4.2.1. Tétel (Tömegpontok statikai nyomatékainak összefüggése) Egy tömegpont két különböző (A és B) pontokra vonatkoztatott statikai nyomatékai között fennáll az

$$\vec{S}_B = \vec{S}_A + m\vec{r}_{BA} \quad (4.2)$$

összefüggés.

Bizonyítás. Az A, B és P pontok relatív helyvektoraira igaz a következő: $\vec{r}_{BP} = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{AP}$ (4.3. ábra).

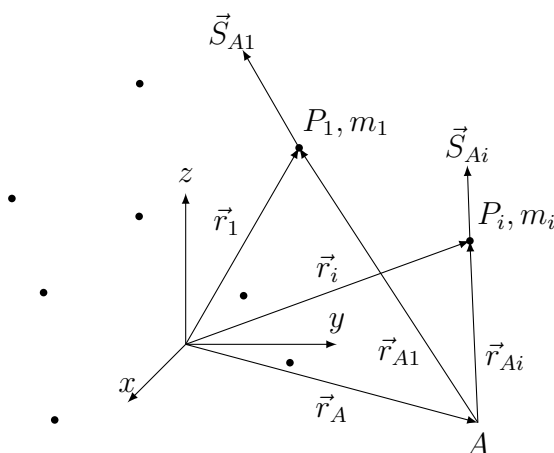
$$\vec{S}_B = m\vec{r}_{BP} = m(\vec{r}_{BA} + \vec{r}_{AP}) = m\vec{r}_{BA} + m\vec{r}_{AP} = m\vec{r}_{BA} + \vec{S}_A \quad (4.3)$$

□

4.2.2. Definíció (Pontrendszer statikai nyomatéka) Egy pontrendszer A pontra vonatkozó statikai nyomatéka a pontrendszert alkotó tömegpontok A pontra vonatkozó statikai nyomatékainak összege:

$$\vec{S}_A = \sum_{i=1}^n \vec{S}_{Ai} \quad (4.4)$$

.



4.4. ábra. A pontrendszer statikai nyomatékához

4.2.2. Tétel (Pontrendszer statikai nyomatékai) Egy pontrendszer két különböző (A és B) pontokra vonatkoztatott statikai nyomatékai között fennáll az

$$\vec{S}_B = \vec{S}_A + m\vec{r}_{BA} \quad (4.5)$$

összefüggés.

Bizonyítás. Felhasználjuk az 4.2.1. tételt.

$$\begin{aligned} \vec{S}_B &= \sum_i \vec{S}_{Bi} = \sum_i m_i \vec{r}_{Bi} = \sum_i m_i (\vec{r}_{BA} + \vec{r}_{Ai}) = \sum_i (m_i \vec{r}_{BA} + m_i \vec{r}_{Ai}) = \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_{BA} + \sum_i m_i \vec{r}_{Ai} = \left(\sum_i m_i \right) \vec{r}_{BA} + \vec{S}_A = m\vec{r}_{BA} + \vec{S}_A. \end{aligned} \quad (4.6)$$

□

4.2.3. Definíció (Pontrendszer tömegközéppontja) Egy pontrendszer tömegközéppontjának nevezzük azt a pontot, amelyre a pontrendszer statikai nyomatéka nulla.

A tömegközéppont jele: T. A tömegközéppontot a helyvektorával adjuk meg, ennek jele: \vec{r}_T .

4.2.3. Tétel (Pontrendszer tömegközéppontjának helyvektora) Egy pontrendszer tömegközéppontjának helyvektora a koordináta-rendszer origójára számított \vec{S}_O statikai nyomaték segítségével megadható:

$$\vec{r}_T = \frac{\vec{S}_O}{m}. \quad (4.7)$$

Bizonyítás. A 4.2.2. tételben a B pont szerepét vegye át a koordináta-rendszer O origója, az A pont szerepét pedig a T tömegközéppont, melynek helye egyelőre ismeretlen. Az \vec{r}_{OT} jelölhető \vec{r}_T -vel is, mert az O origó helyvektora épp a nullvektor.

$$\vec{S}_O = \vec{S}_T + m\vec{r}_T \quad (4.8)$$

Definíció szerint $\vec{S}_T = \vec{0}$, így az állítás azonnal adódik.

□

Egy pontrendszer tömegközéppontjának helyvektora a statikai nyomaték definíciójának felhasználásával így is írható:

$$\vec{r}_T = \frac{\vec{S}_O}{m} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}. \quad (4.9)$$

Ez az összefüggés azért fontos, mert olyan mennyiségeket tartalmaz, melyek a koordináta-rendszer kiválasztása után adóttak, így a tömegközéppont helye könnyen kiszámítható.

Vegyük észre, hogy ha az \vec{r}_T helyre egy m tömegű pontszerű testet helyezünk, annak a statikai nyomatéka (bármely pontra vonatkozóan) megegyezik az \vec{r}_T tömegközéppontú, m össztömegű pontrendszer statikai nyomatékával. Azt mondjuk, hogy a pontrendszer a statikai nyomaték szempontjából egyenértékű az \vec{r}_T helyen levő m tömegű tömegponttal. A pontrendszer a statikai nyomaték szempontjából *helyettesíthető* az \vec{r}_T helyen levő m tömegű tömegponttal.

4.3. Tömegközéppont és súlypont

A tömegközéppont és a súlypont fogalma lényegesen eltér egymástól.

A tömegközéppont az a pont, amelyre egy pontrendszer (vagy kiterjedt test) statikai nyomatéka nulla.

A súlypont a pontrendszerre (vagy kiterjedt testre) ható nehézségi (általában gravitációs) erő eredőjének támadáspontja.

Ez a két pont egybeesik a Föld felszínén található testek esetén. Nem esnek egybe akkor, ha a testre ható gravitációs erő a testen belül jelentősen változik. Ez két esetben lehetséges: akkor, ha a test igen nagy méretű (pl. bolygók és holdjaik, vagy kettőscsillagok kölcsönhatása esetén), és akkor, ha a gravitációs mező kis távolságokon belül is jelentősen változik (pl. feltehetően neutroncsillagok és fekete lyukak közelében, bár ezt személyesen még senkinek sem volt lehetősége megvizsgálni, csak közvetett tudásunk van erre vonatkozóan). Az említett esetek földi körülmények között, a szokásos méretű gépek, testek esetén nem fordulnak elő. Emiatt igen jó közelítéssel azt mondhatjuk, hogy a műszaki alkalmazásokban a tömegközéppont és a súlypont egybeesik.

Ennek az a következménye, hogy a műszaki szóhasználatban, sőt sokszor a fizikában is a tömegközéppont és a súlypont kifejezések szinonimaként használatosak. Ez általánosan elfogadott, nem hiba. További folyománya ennek a szóhasználatnak, hogy a jelölés néhol S , máshol T a magyar szakirodalomban.

Jegyzetünkben ragaszkodunk a fogalmi tisztasághoz, ezért következetesen tömegközéppontról beszélünk, és a T betűt használjuk a jelölésére. A számolási gyakorlatokon, és általában az előbeszédben használjuk és elfogadjuk mindkét kifejezést.

Megjegyzendő, hogy a fentiek nem mentenek fel senkit az alól, hogy a tömegközéppont és a súlypont definícióját pontosan ismerje. Különösen vonatkozik ez a természettudományos és műszaki életpályára készülő diákokra.

Még két vonatkozását kell említenünk a témakörnek.

A középiskolás matematikában is találkozunk a súlypont fogalmával, amely háromszögek esetén a súlyvonalak metszéspontja. Homogén tömegeloszlású és elhanyagolható vastagságú lemezek esetén ez egybeesik a fizikai értelemben vett súlyponttal és tömegközépponttal. Fogalmi szempontból azonban teljesen más, mert itt nincs szó sem tömegről, sem erőről, tehát ez tisztán matematikai fogalom.

A szilárdságtanban a rudak vizsgálatakor szokás a keresztmetszetek súlypontjáról beszélni. Ez is matematikai értelemben vett súlypont, ugyanaz, mint a háromszög súlypontja, csak általános alakban.

Mindkét esetről elmondható, hogy a névazonosság természetesen nem véletlen, történeti okai vannak. Ha egy vékony, egyenletes vastagságú, homogén tömegeloszlású lemezt a matematikai súlypontjában alátámasztunk, akkor egysúlyban marad. Azonban, ha a lemez változó vastagságú, vagy a tömegeloszlása nem homogén, akkor ez már nem teljesül.

4.4. A pontrendszerre ható erők csoportosítása

A tömegpontok rendszerére ható erőket célszerű két csoportra osztani, ezek a külső és a belső erők.

4.4.1. Definíció (Külső erő) Külső erőnek nevezzük a környezet által a pontrendszer valamely tagjára (tömegpontjára) kifejtett erőt.

A külső erők jelölésében megadjuk annak a tömegpontnak a sorszámát, amelyre az erő hat. Például a környezet által a P_1 tömegpontra kifejtett erő jele \vec{F}_1 , a P_i tömegpontra kifejtett erő pedig \vec{F}_i .

4.4.2. Definíció (Belső erő) Belső erőnek nevezzük a pontrendszer valamely tagja által egy másik tagra kifejtett erőt.

A belső erők jelében két index található, az első megadja, hogy mely

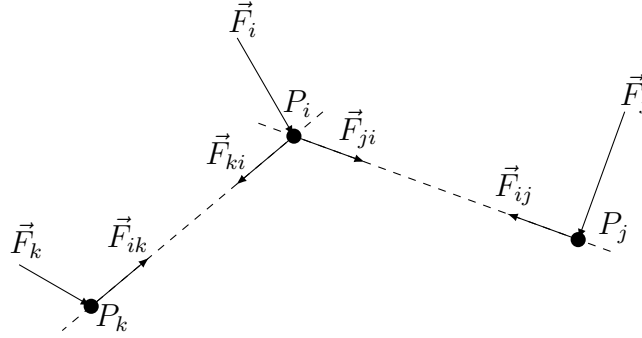
tömegpont fejti ki az erőt, a második index megadja, hogy melyikre. Például a P_1 tömegpont által a P_2 tömegpontra kifejtett erő jele \vec{F}_{12} , a P_i tömegpont által a P_j tömegpontra kifejtett erő jele pedig \vec{F}_{ij} .

A belső erőkről a tapasztalat alapján feltesszük, hogy centrálisak, irányuk megegyezik a relatív helyvektor irányával:

$$\vec{F}_{ij} \parallel \vec{r}_{ij}. \quad (4.10)$$

Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a belső erők vagy vonzó vagy taszító irányúak, a két pontot összekötő szakasszal párhuzamosak, nincs arra merőleges összetevőjük. Annak, hogy a belső erők centrálisak, később nagy jelentősége lesz a perdület vizsgálata során.

A dinamika harmadik alapelve, a hatás-ellenhatás törvénye szerint $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. Ez a két erő nem azonos pontban hat, de nagyságuk egyenlő, hatásvonaluk közös (azért, mert centrálisak!), és irányuk ellentétes. Korábban hangsúlyoztuk, hogy ez a két erő egy tömegpontra vonatkozóan soha nem egyenlítheti ki egymást, mert nem ugyanarra a pontra fejtik ki hatásukat. Pontrendszer esetén, ha az összes tömegpontra végezzük majd az erők összegzését, és az erőknek a *teljes* pontrendszerre kifejtett hatását vizsgáljuk, akkor ki fogjuk használni, hogy $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \vec{F}_{ij} - \vec{F}_{ij} = \vec{0}$.



4.5. ábra. Példák a pontrendszer elemekre ható erőkre

4.5. Pontrendszer impulzusa

4.5.1. Tétel (Pontrendszer impulzusa) Egy pontrendszer impulzusa megadható a tömegének és a tömegközéppontja sebességének szorzataként.

$$\vec{I} = m\vec{v}_T. \quad (4.11)$$

Bizonyítás.

$$\vec{I} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right)' = (m \vec{r}_T)' = m \vec{v}_T. \quad (4.12)$$

□

4.6. Impulzustétel, tömegközéppont tétele

4.6.1. Tétel (Impulzustétel pontrendszerre) Egy tömegpontokból álló rendszer impulzusát csak a külső erők változtatják meg. A rendszer teljes impulzusának idő szerinti megváltozása egyenlő a külső erők eredőjével.

$$\dot{\vec{I}} = \sum_i \vec{F}_i \quad (4.13)$$

Bizonyítás. A pontrendszer egy kiválasztott P_i pontjának mozgásegyenlete:

$$\vec{F}_i + \sum_{j, i \neq j} \vec{F}_{ji} = m_i \vec{a}_i. \quad (4.14)$$

Ez minden $i = 1 \dots n$ indexre teljesül, így a teljes pontrendszer tagjaira összesen n darab ilyen egyenlet írható fel. Adjuk össze ezeket az egyenleteket (azaz végezzük el az összegzést i -re is):

$$\sum_i \vec{F}_i + \sum_{i, j, i \neq j} \vec{F}_{i,j} = \sum_i m_i \vec{a}_i. \quad (4.15)$$

A $\sum_{i, j, i \neq j} \vec{F}_{i,j}$ összegben fellép minden indexkombináció, ezért minden \vec{F}_{ij} tagnak szerepel benne az ellentett \vec{F}_{ji} párja, mellyel összeadva nulla az eredmény. Ezért $\sum_{i, j, i \neq j} \vec{F}_{i,j} = 0$. Ezzel kapjuk a következő egyenlőséget:

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i = \left(\sum_i m_i \vec{v}_i \right)' = \dot{\vec{I}}. \quad (4.16)$$

□

A pontrendszerekre vonatkozó impulzustétel jelentősége igen nagy. Alapját képezi a szerkezetek dinamikájának, az ütközések elméletének, és számos más fontos műszaki feladat tárgyalásának. Az impulzustétel alapján megfogalmazható a tömegközéppont tétele.

4.6.2. Tétel (A tömegközéppont tétele, súlyponttétel) Egy pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha a teljes pontrendszer tömege itt lenne egyesítve, és a külső erők erre a pontra hatnának.

$$\sum_i \vec{F}_i = m\ddot{\vec{r}}_T = m\vec{a}_T \quad (4.17)$$

Bizonyítás. Induljunk ki az 4.6.1. impulzustételből:

$$\sum_i \vec{F}_i = \dot{\vec{I}} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = (\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i)^{\cdot} \quad (4.18)$$

Az egyenlőség sor utolsó tagját hasonlítsuk össze a tömegközéppont helyvektorával (\vec{r}_T):

$$\vec{r}_T = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}. \quad (4.19)$$

Leolvasható, hogy a fentebb megkezdett egyenlőség sor így folytatható:

$$(\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i)^{\cdot} = (m\dot{\vec{r}}_T)^{\cdot} = m\ddot{\vec{r}}_T. \quad (4.20)$$

□

4.7. Az impulzusnyomaték

Az impulzusnyomatéket perdületnek és impulzusmomentumnak is nevezik. A pontrendszer impulzusnyomatéka, ahogy korábban láttuk, az egyes tömegpontok impulzusnyomatékainak összegeként adható meg. Például a koordináta-rendszer O kezdőpontjára vonatkozó impulzusmomentum: $\vec{N}_O = \sum_i \vec{N}_{Oi} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{I}_i$. Általános esetre adjuk meg a következő definíciót.

4.7.1. Definíció (Pontrendszer impulzusnyomatéka) A pontrendszernek egy tetszőleges B pontra vonatkozó impulzusnyomatéka (impulzusmomentuma, perdülete):

$$\vec{N}_B = \sum_i \vec{N}_{Bi} = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_B) \times \vec{I}_i. \quad (4.21)$$

Ebből a definícióból azonnal megállapítható, hogyan függ össze az origóra és egy tetszőleges pontra számított impulzusnyomaték.

4.7.1. Tétel (Pontrendszer impulzusnyomatéka különböző pontokra) Egy pontrendszernek a koordináta-rendszer origójára és egy tetszőleges B pontra számított impulzusnyomatéka között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$\vec{N}_B = \vec{N}_O - m\vec{r}_B \times \vec{v}_T. \quad (4.22)$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \vec{N}_B &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_B) \times \vec{I}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{I}_i - \sum_i \vec{r}_B \times \vec{I}_i = \\ &= \vec{N}_O - \vec{r}_B \times \sum_i \vec{I}_i = \vec{N}_O - \vec{r}_B \times \vec{I} = \vec{N}_O - m\vec{r}_B \times \vec{v}_T. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Felhasználtuk a 4.5.1. tételt. □

4.7.2. Tétel (Az impulzusnyomaték tétele, perdülettétel) Egy tömegpontrendszer \vec{N}_B impulzusnyomatékát a külső erők \vec{M}_B forgatónyomatékainak eredője változtatja meg.

$$\dot{\vec{N}}_B = \vec{M}_B. \quad (4.24)$$

Bizonyítás. Később felhasználjuk majd egyetlen tömegpont mozgásegyenletét:

$$\dot{\vec{I}}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ji}. \quad (4.25)$$

Induljunk ki a pontrendszer impulzusnyomatékának deriváltjából, figyelembe véve a 4.7.1. definíciót, és végezzük el rajta azonos átalakítások sorát:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{N}}_B &= \frac{d}{dt} \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_B) \times \vec{I}_i \\ &= \sum_i \underbrace{(\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_B) \times \vec{I}_i}_{\vec{0}, \text{ mert } \dot{\vec{r}}_B = \vec{0} \text{ és } \dot{\vec{r}}_i \parallel \vec{I}_i} + (\vec{r}_i - \vec{r}_B) \times \dot{\vec{I}}_i \\ &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_B) \times m_i \ddot{\vec{r}}_i \\ &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_B) \times (\vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ji}) \\ &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_B) \times \vec{F}_i + \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_B) \times \sum_j \vec{F}_{ji} \\ &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_B) \times \vec{F}_i + \sum_{i,j, i \neq j} (\vec{r}_i - \vec{r}_B) \times \vec{F}_{ji} \end{aligned} \quad (4.26)$$

a kettős összeget másképp írjuk, így látható lesz, mely tagok ejtik ki egymást

$$\begin{aligned}
&= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_B) \times \vec{F}_i + \sum_{j < i} \left((\vec{r}_i - \vec{r}_B) \times \vec{F}_{ji} + (\vec{r}_j - \vec{r}_B) \times \vec{F}_{ij} \right) \\
&= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_B) \times \vec{F}_i + \sum_{j < i} \left((\vec{r}_i - \vec{r}_B) \times \vec{F}_{ji} + (\vec{r}_j - \vec{r}_B) \times (-\vec{F}_{ji}) \right) \\
&= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_B) \times \vec{F}_i + \sum_{j < i} \left((\vec{r}_i - \vec{r}_j - \underbrace{\vec{r}_B + \vec{r}_B}_{\vec{0}}) \times \vec{F}_{ji} \right) \\
&= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_B) \times \vec{F}_i + \sum_{j < i} \underbrace{(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji}}_{\vec{0} \text{ mert a belső erők centrálisak: } \vec{r}_{ji} \parallel \vec{F}_{ji}} \\
&= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_B) \times \vec{F}_i = \vec{M}_B.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

A bizonyítás során beláttuk, hogy a belső erők forgatónyomatéka tetszőleges (B) pontra nulla. Ez éppen az a kettős összeg, amiről kiderült, hogy eltűnik. \square

5.

A merev test kinematikája

5.1. A merev test fogalma

5.1.1. Definíció (Merev test) A merev test olyan idealizált test, amelynek bármely két pontja közötti távolság állandó.

A merev test belső szerkezetére vonatkozóan két elképzelést is használhatunk. Mindkettő elfogadott, és elterjedten használt a természettudományban és a műszaki tudományban.

A merev test felfogható olyan pontrendszerként, melynek pontjai állandó távolságra vannak egymástól. Úgy is mondjuk, hogy diszkrét (elkülönülő, nulla méretű "csomagocskákba" rendezett) tömegeloszlásúnak képzeljük a testet. Ekkor 4. fejezetben foglaltak közvetlenül alkalmazhatók rá. Természetesen annál több is, hiszen a részecskék állandó távolságából további állítások is következnek.

Más felfogásban a merev testet elképzelhetjük úgy, hogy az anyaga folytonosan (szakadások, hézagok nélkül) tölti ki a teret.

5.1.2. Definíció (Kontínuum) Kontínuumnak nevezzük azt a testet, amelynek anyaga folytonosan tölti ki a teret.

Tudnunk kell, hogy mindkét felfogás idealizáció. A kontínuum szemlélet nem "valóságosabb", mint a pontrendszer, mert a valóságos testekben igen sok makroszkopikus, mikroszkopikus és szubmikroszkopikus (atomi méretű) üres hely van jelenlegi ismereteink szerint. Gondoljunk csak arra, hogy egyetlen atom átmérőjének nagyjából tízzezred része az atommag átmérője, a térfogata tehát $(1000)^3 = 10^{12}$ -ször (billiószor, ami milliószor millió) kisebb, mint az atomé. Ugyanakkor az atom tömege majdnem teljes egészében az atommag-

ba összpontosul. Az atommag körül elektronok tartózkodnak (rendszámától és kémiai állapottól függő számban), melyek össztömege az atommag tömegének jóval kevesebb, mint ezredrészét teszi ki ¹. Minden atom belsejében tehát (akár klasszikus, akár kvantummechanikai gondolkodásmóddal képzeljük el), az atommag körül található egy elképesztően nagy tömegsűrűség-ugrás. Az atommag sűrűsége (billiomod résznyi térfogat, amiben ezerszeres tömeg összpontosul) legalább ezerbilliószor, azaz 1 000 000 000-szor nagyobb a körülötte levő elektronfelhő átlagos sűrűségénél. Mechanikai szempontból azt lehet tehát mondani, hogy az elektronfelhő szinte "üres" az atommaghoz képest. ² Nagyságrendileg azt lehet mondani, hogy egy atom belsejében több kicsi tömegsűrűségű, "üres hely" van, mint amennyit anyaggal (a testek tömegének 99.99%-át adó atommaggal) kitöltöttnek lehet képzelni. Továbbá gondolhatunk szilárd testek esetén a mikropedésekre, rácshibákra, zárványokra.

Mindezekkel együtt, a kontínuum szemlélet közelebb áll a műszaki gondolkodáshoz, és jobban támogatja azt, mert a számítások jelentős része szempontjából elegendő csak az anyag mikroszerkezetére vonatkozó feltételeket tenni. Amikor kontínuumként képzelünk el egy szilárd testet, akkor azt feltételezzük, hogy tömegsűrűsége folytonos függvénnyel adható meg. Ezzel majd a dinamikában foglalkozunk részletesebben.

A diszkrét és a folytonos modell tárgyalásának matematikai formalizmusa is eltér egymástól. Diszkrét tömegeloszlású (tehát pontrendszernek képzelt) test esetén a teljes testre vonatkozó mennyiségeket (például az össztömeget) egyszerű összegzéssel állítjuk elő. Ebből következően a tételek megfogalmazásában és bizonyításában is összeadásokat használunk, ami a legtöbb tanuló számára könnyebben átlátható, értelmezhető. Folytonos tömegeloszlás feltételezése esetén az összegzések helyett integrálást kell alkalmazni. Ez elvi szempontból nem sokban különbözik ugyan az összegzéstől, mégis formalizmusa kevésbé áttekinthetőnek tűnik azok számára, aki még nem sokat foglalkoztak vele.

Ebben a jegyzetben nagyrészt mégis a kontínuum szemléletben tárgyaljuk a merev testekre vonatkozó összefüggéseket, mert így olyan végformulákat lehet kidolgozni, melyek a mérnöki munkában közvetlenül alkalmazhatók. Az olvasónak segíthet a tananyag kontínuummechanikai részének elvi megértésében, ha visszatekint a pontrendszerekre megfogalmazott tételekre, és az ottani összegzések helyébe (a matematikai precizitást átmenetileg háttérbe szorítva) integrálásokat gondol.

¹ A hidrogén 1-es tömegszámú izotópja esetén ez az arány $1/1836 \simeq 0.00054$, minden más atom, ion esetén ennél kisebb.

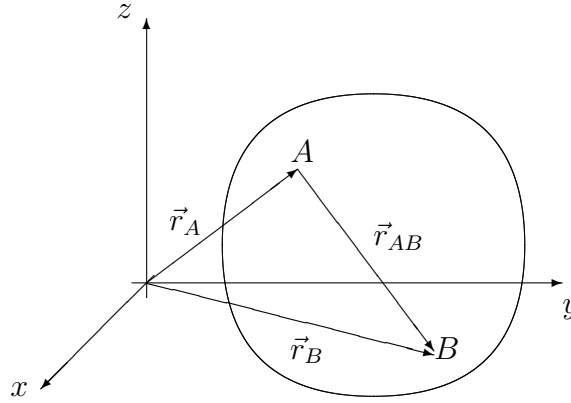
²Érdemes elgondolkodni azon, hogy mégis, az összes kémiai és biokémiai jelenség lezajlását ennek az elhanyagolható tömegű elektronrendszernek a törvényszerűségei szabják meg, beleértve az élő szervezetek kémiai működését is.

5.2. Relatív hely-, sebesség-, gyorsulásvektorok

Ha a merev test két tetszőleges pontja A és B, ezek helyvektorai \vec{r}_A és \vec{r}_B , akkor a fenti definíció matematikai megfogalmazása

$$|\vec{r}_{AB}| = d_{AB} = \text{állandó}, \quad (5.1)$$

ahol az \vec{r}_{AB} az A-ból a B pontba mutató relatív helyvektor.



5.1. ábra

5.2.1. Definíció (Relatív helyvektor) Ha A és B a merev test két tetszőleges pontja, akkor az A pontból a B pontba mutató relatív helyvektor

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A. \quad (5.2)$$

A 5.1. ábra mutatja ezeket a vektorokat. Megjegyzendő, hogy a B pontból az A pontba mutató \vec{r}_{BA} relatív helyvektor is értelmezett, és $\vec{r}_{BA} = -\vec{r}_{AB}$.

A merev test tetszőleges A és B pontjainak sebességvektorai

$$\vec{v}_A = \dot{\vec{r}}_A, \vec{v}_B = \dot{\vec{r}}_B. \quad (5.3)$$

5.2.2. Definíció (Relatív sebességvektor) A merev test két, tetszőleges A és B pontjainak relatív sebességvektora

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A. \quad (5.4)$$

5.2.1. Tétel (A relatív sebességvektor előállítás) A relatív sebességvektor a relatív helyvektor idő szerinti első deriváltja

$$\vec{v}_{AB} = \dot{\vec{r}}_{AB}. \quad (5.5)$$

Bizonyítás. A 5.2. és 5.4. definíciókból, valamint a deriválás szabályaiból következik:

$$\dot{\vec{r}}_{AB} = (\vec{r}_B - \vec{r}_A)' = \dot{\vec{r}}_B - \dot{\vec{r}}_A = \vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{v}_{AB}. \quad (5.6)$$

□

A merev test A és B pontjainak gyorsulásvektorai $\vec{a}_A = \dot{\vec{v}}_A, \vec{a}_B = \dot{\vec{v}}_B$.

5.2.3. Definíció (Relatív gyorsulásvektor) A merev test két, tetszőleges A és B pontjainak relatív gyorsulásvektora

$$\vec{a}_{AB} = \vec{a}_B - \vec{a}_A. \quad (5.7)$$

5.2.2. Tétel (A relatív gyorsulásvektor előállítása) A relatív gyorsulásvektor a relatív sebességvektor idő szerinti első deriváltja, a relatív helyvektornak idő szerinti második deriváltja:

$$\vec{a}_{AB} = \dot{\vec{v}}_{AB} = \ddot{\vec{r}}_{AB}. \quad (5.8)$$

Bizonyítás. A 5.2., 5.4., 5.7. definíciók és a deriválás szabályai alapján, az 5.2.1. tétel bizonyításának mintájára könnyen belátható. □

5.3. A merev test szabadsági foka

5.3.1. Tétel (A merev test szabadási foka) A szabad merev test szabadsági foka 6.

Bizonyítás. Azt számoljuk össze, hogy hány független adat szükséges a merev test térbeli helyzetének egyértelmű megadásához. Abból indulunk ki, hogy a merev test három, nem egy egyenesbe eső A, B, C pontjának rögzítésével a test helyzete egyértelműen megadható a térben. Ez a merev test definíciójából következik. Ugyanis egy negyedik pontnak a rögzített három ponttól mért távolságai adottak, miáltal a helye egyértelműen meghatározott. Az A, B, C pontok helyvektorainak koordinátái összesen 9 skalár adat:

$$\vec{r}_A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix}, \vec{r}_B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix}, \vec{r}_C = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Mivel ezen pontoknak egymástól mért távolsága állandó, három egyenlet teremt összefüggést az adatok között.

$$\begin{aligned} |\vec{r}_{AB}| &= |\vec{r}_B - \vec{r}_A| = d_{AB} \\ |\vec{r}_{AC}| &= |\vec{r}_C - \vec{r}_A| = d_{AC} \\ |\vec{r}_{BC}| &= |\vec{r}_C - \vec{r}_B| = d_{BC} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Minden összefüggés eggyel csökkenti a független skalár adatok számát, így a három pont térbeli helyzetét 6 független skalár adat határozza meg. Ha további pontot adunk a rendszerhez, akkor az újabb pont három koordinátája közül már egyik sem független adat, mert az előzőleg elhelyezett pontoktól mért távolságok meghatározzák azokat. Így tetszőleges számú pontot hozzáadhatunk a merev testhez anélkül, hogy nőne a helyzetének megadásához szükséges független skalár adatok száma. Ebből az állítás következik. \square

Ha egy másik test korlátozza a merev test mozgását, akkor a szabadsági fokok száma kevesebb is lehet. A fontosabb esetek az alábbiak:

- Ha a merev test egy pontja rögzített a térben, akkor a szabadsági fokok száma 3, mert három darab szög adattal megadható a test helyzete.
- Ha a merev test két pontja rögzített a térben, akkor csak a két pont által meghatározott egyenes körüli elfordulást jellemző egyetlen adat szükséges a térbeli helyzet megadásához, így a szabadsági fokok száma 1.

- Síkmozgás esetén, amikor a merev test minden pontja csak párhuzamosan mozoghat egy adott síkkal, a szabadsági fokok száma 3. Ekkor egy tetszőleges pontnak a síkra vett vetületének a helyét kell megadni (2 adat), és a ponton keresztül, a síkra merőleges tengely körüli elfordulást (1 adat).

A következőkben a merev test definíciója alapján bármely két pontja közötti relatív helyvektort ismertnek tekintünk.

5.3.1. Kiegészítés: a merev test szabadsági fokáról

A szabad merev test szabadsági fokát más úton is ki lehet számítani, de ez kevésbé általános, csak a tömegpontokból állónak képzelt merev testre alkalmazható közvetlenül. Itt külön figyelmet kell fordítani a független kényszerfeltételek összeszámlálására.

Az N darab tömegpontból állónak képzelt szabad merev test szabadsági fokát úgy határozhatjuk meg, hogy az N db szabad tömegpont szabadsági fokából ($3N$) levonjuk a merev test definíciójából adódó, a pontok helykoordinátái között fennálló összefüggéseket (d_{AB} állandó minden A, B pontpárra), ami $\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$ összefüggést jelent. Ezzel az alapjaiban helyes, de óvatlanul alkalmazott gondolatmenettel a független adatok számára, azaz a szabadsági fokra az alábbi formula adódik:

$$3N - \binom{N}{2}. \quad (5.11)$$

Mivel a szabad merev test szabadsági foka nem függ attól, hogy hány tömegpontból áll, a 5.11. formula helyettesítési értéke minden N esetén 6 kellene, hogy legyen. Ez azonban nem teljesül. A 5.1. táblázat azt mutatja, hogy az $N = 1 \dots 4$ esetekben a szabadsági fok helyes értékeiket kapjuk, ennél nagyobb N esetén azonban nem. Az $N = 1$ eset természetesen nem merev testet jelent, hanem egyetlen szabad tömegpontot, amelyre $f = 3$, az $N = 2$ pedig egy merev rúddal összekötött két tömegpontot, amelyre $f = 5$, hiszen a két pontot összekötő egyenes körül nem tud forogni.

N	$3N$	$\binom{N}{2}$	$3N - \binom{N}{2}$
1	3	0	3
2	6	1	5
3	9	3	6
4	12	6	6
5	15	10	5
6	18	15	3
10	30	45	-15 !!!

5.1. táblázat. A 5.11. formula néhány helyettesítési értéke. Látható, hogy a merev test szabadsági fokát nem kapjuk meg minden esetben.

Ezt némelyek "paradoxonnak" is nevezik. Tudománytörténeti érdekessége, hogy Albert Einstein *The meaning of relativity* című művének bevezető fejezetében is a 5.11. képlettel adja meg a merev test szabadsági fokát. Valójában nincs szó paradoxonról. A

5.11. formula egyszerűen hibás, mert túl sok, egymással összefüggő feltételt vesz figyelembe. Az $N = 4$ esetig nincs gond, mert még nem lépnek fel az összefüggő feltételek. Az ötödik pont esetében a korábban rögzített négy pont közül bármely háromtól mért távolság egyértelműen meghatározza az ötödik pont helyét, ezért van egy adat, a negyedik ponttól mért távolság, ami kiszámítható az előzőleg figyelembe vett adatokból. Valójában az első három pont helyének megadása után a többi $N - 3$ pont megadható az első három ponttól mért távolsága alapján (ha tudjuk, hogy a három pont által meghatározott sík mely oldalán van). Ezért az első három pont kiválasztását követően fennmaradó, $N - 3$ számú pontból álló halmaz elemeinek az egymás közötti távolsága már nem független feltétel. Ezeknek a nem független feltételeknek a száma $\binom{N-3}{2} = \frac{(N-3)(N-4)}{2}$, amit le kell vonnunk a $\binom{N}{2}$ -ből. Ennek figyelembe vételével a merev test szabadsági foka (bármely N esetén):

$$\begin{aligned} f &= 3N - \left(\binom{N}{2} - \binom{N-3}{2} \right) = 3N - \frac{N(N-1)}{2} + \frac{(N-3)(N-4)}{2} = \\ &= 3N - \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} + \frac{N^2}{2} - \frac{7N}{2} + \frac{12}{2} = 6. \end{aligned} \quad (5.12)$$

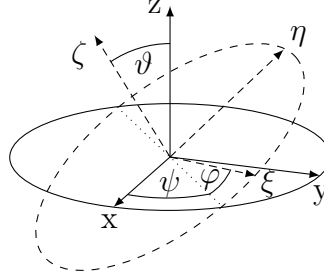
A 5.3.1. tétel érvényessége nem függ attól, hogy a merev testet pontrendszernek vagy kontinuumnak képzeljük.

5.4. A merev test térbeli helyzetének megadása

A tömegpontoknál használt *hely* fogalma helyett a kiterjedt testek esetén a *helyzetet* használjuk, amely magában foglalja a test térbeli irányítottságát is. A helyzet megadásának egyik legelterjedtebb módja Eulertől származik. Eszerint a következőképpen járunk el. A test helyzetét egy vonatkoztatási rendszerhez viszonyítva adjuk meg, amelyhez a K térbeli derékszögű koordináta-rendszert rögzítjük, ennek tengelyei x, y, z . Képzeltben rögzítünk a merev testhez egy másik térbeli derékszögű K' koordináta-rendszert, melynek tengelyeit jelöljük az alábbi kis görög betűk: ξ, η, ζ . Adjuk meg a testhez rögzített koordináta-rendszer O' kezdőpontjának $x_{O'}, y_{O'}, z_{O'}$ koordinátáit a vonatkoztatási rendszerhez rögzített K koordináta-rendszerben, ez 3 adat. A test térbeli irányítottságát három darab szög adattal jellemezzük. A szögek megadásakor toljuk el a testhez rögzített koordináta-rendszer kezdőpontját az xyz koordináta-rendszer kezdőpontjába, mivel a tengelyek egymáshoz viszonyított helyzetének megadásakor a kezdőpont helyzete közömbös. Megadjuk azt a három forgatást, amely az xyz koordináta-rendszer tengelyeit a $\xi\eta\zeta$ tengelyekkel fedésbe hozza. A 5.2. ábrán bemutatott $\{\psi, \vartheta, \varphi\}$ szögeket Euler-szögeknek nevezzük. Így a merev test térbeli helyzetét megadtuk az alábbi hat független adattal: $x_{O'}, y_{O'}, z_{O'}, \psi, \vartheta, \varphi$.

Az Euler-szögeket más megegyezés szerint is lehet definiálni.

A merev testhez rögzített K' ξ, η, ζ koordináta-rendszer a továbbiakban is fontos szerepet játszik. A K' -t gyakran nevezik a merev testtel együtt mozgó, vagy együtt forgó koordináta-rendszernek.



5.2. ábra. A merev test orientációjának megadása Euler-szögekkel

5.5. A merev test sebességállapota

A merev test sebességállapotát akkor tekintjük ismertnek, ha minden pontjának sebessége ismert.

5.5.1. Tétel (Merev test relatív sebességvektorának iránya) A merev test bármely két pontjának relatív helyvektora és relatív sebességvektora merőlegesek egymásra

$$\vec{r}_{AB} \cdot \vec{v}_{AB} = 0. \quad (5.13)$$

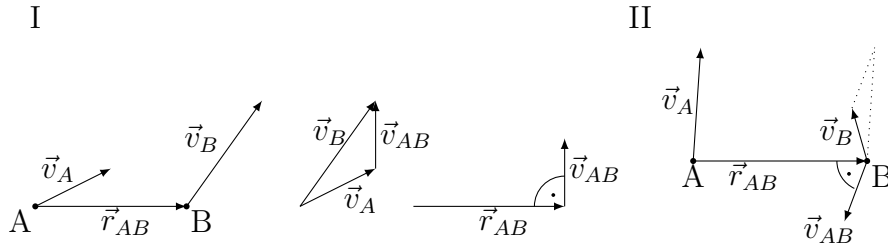
Bizonyítás. A merev test definíciójából $|\vec{r}_{AB}| = \text{állandó}$, ebből következik, hogy

$$|\vec{r}_{AB}|^2 = r_{AB}^2 = \text{állandó}. \quad (5.14)$$

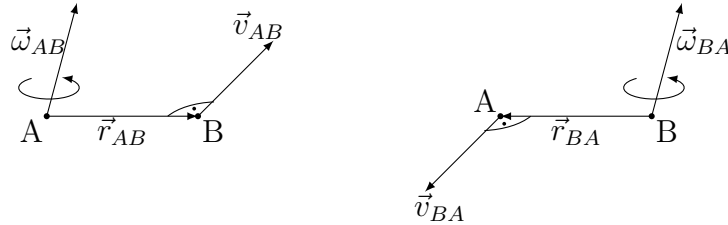
Mindkét oldalt idő szerint deriválva

$$2 \vec{r}_{AB} \cdot \dot{\vec{r}}_{AB} = 0, \quad (5.15)$$

amiből éppen az állítás következik, mivel $\dot{\vec{r}}_{AB} = \vec{v}_{AB}$. □



5.3. ábra. A 5.5.1. tétel szemléltetése. A relatív helyvektor és a relatív sebességvektor helyzete a merev test két pontja esetén (I). A \vec{v}_A és a \vec{v}_B nem feltétlenül esik egy síkba(II).



5.4. ábra. A merev test pontjai egymáshoz viszonyítva pillanatnyi körmozgást végeznek

A merev test egy tetszőleges pontjához viszonyítva bármely másik pont pillanatnyi körmozgást végez (5.4. ábra). Ezeknek a relatív körmozgásoknak a sugara természetesen különböző, éppen megegyezik a pontok relatív helyvektorának a forgástengelyre merőleges vetületének hosszával. Az 5.5.1. tételből az is következik, hogy a relatív sebességvektor mindig megadható egy vektori szorzás formájában

$$\dot{\vec{r}}_{AB} = \vec{v}_{AB} = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{AB}, \quad (5.16)$$

ahol $\vec{\omega}_{AB}$ a B pontnak az A ponthoz viszonyított pillanatnyi körmozgásának szögsebesség vektora. A merev test pontjainak egymáshoz viszonyított körmozgásának szögsebességére kimondható az alábbi fontos tétel.

5.5.2. Tétel (A merev test szögsebessége szabad vektor) A merev test szögsebessége szabad vektor.

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy a merev test bármely két pontjának relatív körmozgása azonos szögsebességgel zajlik. Válasszuk ki a merev test három, nem egy egyenesbe eső pontját, ezeket jelölje A, B és C. Relatív

helyvektoraik között fennáll az alábbi nyilvánvaló összefüggés:

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_{AC} + \vec{r}_{CB}, \quad (5.17)$$

az idő szerinti deriváltakra, azaz a relatív sebességekre pedig

$$\dot{\vec{r}}_{AB} = \dot{\vec{r}}_{AC} + \dot{\vec{r}}_{CB}. \quad (5.18)$$

A 5.5.1. tételből következően a relatív sebességek kifejezhetők a szögsebességekkel vektori szorzat formájában:

$$\vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{AB} = \vec{\omega}_{AC} \times \vec{r}_{AC} + \vec{\omega}_{CB} \times \vec{r}_{CB}, \quad (5.19)$$

ahol a szögsebességeket egyelőre különbözőknek tekintjük. A 5.17. egyenlőség segítségével \vec{r}_{AB} kiküszöbölhető

$$\vec{\omega}_{AB} \times (\vec{r}_{AC} + \vec{r}_{CB}) = \vec{\omega}_{AC} \times \vec{r}_{AC} + \vec{\omega}_{CB} \times \vec{r}_{CB}, \quad (5.20)$$

végül átrendezéssel

$$(\vec{\omega}_{AB} - \vec{\omega}_{AC}) \times \vec{r}_{AC} + (\vec{\omega}_{AB} - \vec{\omega}_{CB}) \times \vec{r}_{CB} = \vec{0} \quad (5.21)$$

adódik. Mivel \vec{r}_{AC} és \vec{r}_{CB} tetszőlegesek, a bal oldal csak akkor lehet nulla, ha

$$(\vec{\omega}_{AB} - \vec{\omega}_{AC}) = \vec{0} \text{ és } (\vec{\omega}_{AB} - \vec{\omega}_{CB}) = \vec{0} \quad (5.22)$$

egyszerre teljesülnek. Ebből következik

$$\vec{\omega}_{AB} = \vec{\omega}_{AC} = \vec{\omega}_{CB} = \vec{\omega}. \quad (5.23)$$

□

A tétel azt jelenti, hogy a merev test bármely pontja körül ugyanazzal az $\vec{\omega}$ szögsebességgel forog. Másképp fogalmazva, a merev test bármely két pontját kiválasztva, az egyik pont másik ponthoz viszonyított pillanatnyi körmozgásának a szögsebesség vektora ugyanaz. Így az $\vec{\omega}$ szögsebesség a *teljes* merev test sebességállapotát jellemzi, nem csupán két kiválasztott pontjának egymáshoz viszonyított mozgását. Az 5.5.2. tétel szerint a 5.4. ábrán $\vec{\omega}_{AB} = \vec{\omega}_{BA}$ és $\vec{v}_{BA} = -\vec{v}_{AB}$.

5.5.3. Tétel (Merev test tetszőleges pontjának sebessége) A merev test egy (B) pontjának sebessége kifejezhető egy tetszőlegesen kiválasztott (A) pontjának sebességével és a szögsebességével

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \quad (5.24)$$

Ehhez a tételhez két bizonyítást is érdemes megismerni. Mindkettő egyszerű, és más-más oldalról világítják meg a tételt.

Bizonyítás. A 5.5.1. és 5.5.2. tételek alapján

$$\begin{aligned}\vec{v}_{AB} &= \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \\ \vec{v}_B - \vec{v}_A &= \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \\ \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}\end{aligned}\tag{5.25}$$

□

Bizonyítás. Másik bizonyítás a 5.5.3. tételhez. A merev testhez rögzített, $\vec{\omega}$ szögsebességgel forgó koordináta-rendszer kezdőpontja legyen A, amelynek az álló rendszerbeli helyvektora \vec{r}_A . Ebben a koordináta-rendszerben a B pont helyvektora \vec{r}_{AB} . A B pont álló koordináta-rendszerben megadott helyvektora \vec{r}_B .

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}\tag{5.26}$$

A bizonyításhoz használjuk fel, hogy a B pont sebességét a térben álló koordináta-rendszerhez viszonyítva fejezzük ki.

$$\dot{\vec{r}}_B = \vec{v}_B = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{r}}_{AB} = \vec{v}_A + \dot{\vec{r}}_{AB}^* + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}.\tag{5.27}$$

Itt $\dot{\vec{r}}_{AB}^* = \vec{0}$, mert a test merevsége miatt a testhez rögzített koordináta-rendszerhez viszonyítva a test bármely pontja, így a B pont is áll. □

5.5.1. Definíció (Merev test sebességállapotának redukált vektorkettőse)
A merev test sebességállapotának A pontba redukált vektorkettősén az

$$[\vec{\omega}; \vec{v}_A]_A\tag{5.28}$$

vektorpárt értjük.

A redukált vektorkettős segítségével a merev test bármely pontjának sebessége megadható. A redukált vektorkettős a merev test sebességállapotát egyértelműen meghatározza.

5.5.4. Tétel (Merev test pillanatnyi mozgásának összetevői) A merev test pillanatnyi mozgása mindig előállítható egy transzláció (eltolás, haladó mozgás) és egy rotáció (forgás) összegeként.

Bizonyítás. Induljunk ki a 5.5.3. tételből, amely alapján egy pont (B) sebessége $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$. A pillanatnyi, azaz differenciálisan kicsi dt idő alatt bekövetkező differenciálisan kicsi $d\vec{r}_B$ elmozdulás:

$$d\vec{r}_B = \vec{v}_B dt = \vec{v}_A dt + (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}) dt = d\vec{r}_A + \underbrace{\vec{\omega} dt}_{d\vec{\varphi}} \times \vec{r}_{AB}, \quad (5.29)$$

$$d\vec{r}_B = d\vec{r}_A + d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{AB}. \quad (5.30)$$

A $d\vec{\varphi}$ a merev test A pont körüli elfordulásának vektora, a test minden egyes pontja ekkora szöggel fordul el a kicsiny dt idő alatt. Az elfordulásból adódó elmozdulás a B pont esetén az $d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{AB}$ összefüggéssel kapható. Ezzel beláttuk, hogy egy pont $d\vec{r}_B$ elmozdulása előállítható az A pont $d\vec{r}_A$ elmozdulásából és az A pont körüli elfordulásból adódó $d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{AB}$ elmozdulásból. \square

A eltolás, más szóval haladó mozgás neve transláció, az elfordulása a rotáció. Tiszta translációról akkor beszélünk, ha $d\vec{\varphi} = \vec{0}$.

5.5.5. Tétel (Nulla szögsebességű merev test sebességállapota) Ha a merev test szögsebessége nulla, akkor minden pontjának sebessége egyenlő.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hiszen ha $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$ kifejezésben $\vec{\omega} = \vec{0}$, akkor $\vec{v}_B = \vec{v}_A$ bármely A és B pont esetén. \square

A 5.5.5. tétel a tiszta transláció igen fontos tulajdonságát mondja ki. Tiszta rotációról akkor beszélünk, ha $d\vec{\varphi} \neq 0$, és van a testnek olyan Q pontja, amelyre $d\vec{r}_Q = \vec{0}$. A tiszta translációt és a tiszta rotációt egyszerű mozgásoknak is nevezik. Ellenkező esetben a mozgás összetett.

5.6. A centrális egyenes

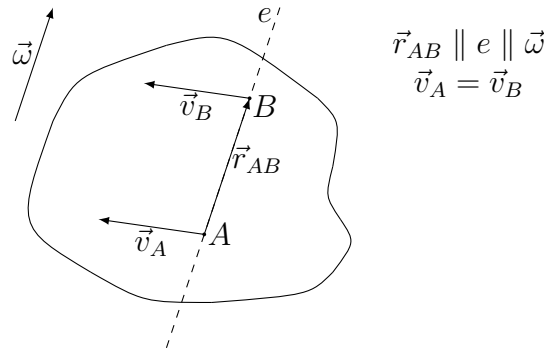
Az előző fejezet bemutatta a merev test sebességállapotára vonatkozó alapvető tételeket. A sebességállapotot a redukált vektorkettős egyértelműen meghatározza. Amennyiben a szögsebesség nem nulla, a merev test sebességállapotának további fontos jellegzetességeit lehet megmutatni. Erről szól a jelen fejezet.

5.6.1. Tétel (A szögsebességgel párhuzamos egyenesen levő két pont sebessége) Ha a merev test szögsebessége nem nulla, és az AB szakasz párhuzamos a szögsebességgel, akkor az A és B pontok sebessége egyforma.

Bizonyítás. A tétel szerint $\overline{AB} \parallel \vec{\omega}$. Ezzel együtt $\vec{r}_{AB} \parallel \overline{AB} \parallel \vec{\omega}$. A merev test sebességállapotának A pontba redukált vektorkettőse $[\vec{\omega}; \vec{v}_A]_A$. A 5.5.3. tétel szerint, és kihasználva, hogy párhuzamos vektorok vektori szorzata nulla

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}}_{0, \text{ mert } \vec{\omega} \parallel \vec{r}_{AB}} = \vec{v}_A. \quad (5.31)$$

□



5.5. ábra. A szögsebességgel párhuzamos egyenes mentén elhelyezkedő pontok sebessége egyenlő, illusztráció a 5.6.1. és a 5.6.2. tételekhez

5.6.2. Tétel (A szögsebességgel párhuzamos egyenesen levő pontok sebessége) Ha a merev test szögsebessége nem nulla, akkor a merev test egy, a szögsebességgel párhuzamos egyenes mentén elhelyezkedő pontjainak sebessége egyenlő.

Bizonyítás. A 5.6.1. tétel alapján nyilvánvaló. □

A merev test szögsebessége alapvető szerepet kap a merev test mozgásának leírásában. A következő tételben a merev test egy tetszőleges A pontjának \vec{v}_A sebességét felbontjuk a szögsebességgel párhuzamos $\vec{v}_{A\parallel}$ és a szögsebességre merőleges $\vec{v}_{A\perp}$ összetevőkre: $\vec{v}_A = \vec{v}_{A\parallel} + \vec{v}_{A\perp}$.

5.6.3. Tétel (A szögsebesség irányába mozgó pont létezése és helyének megadása) Ha a merev test $\vec{\omega}$ szögsebessége nem nulla, akkor van a térben olyan Q pont, amelybe redukálva a sebességállapotot a redukált vektorkettős $[\vec{\omega}; \vec{v}_Q]_Q$ úgy, hogy $\vec{\omega} \times \vec{v}_Q = 0$.

A tétel azt állítja, hogy nem nulla szögsebesség esetén létezik olyan anyagi (a test belsejében levő) vagy térbeli (a testen kívül elhelyezkedő, de a testtel mereven együtt mozgóknak képzeltek) pont, amelynek a sebessége nem rendelkezik a szögsebességre merőleges összetevővel, azaz vagy párhuzamos azzal, vagy nulla.

Bizonyítás. Az állítást úgy bizonyítjuk, hogy általános eljárást adunk egy ilyen pont helyvektorának kiszámítására. Az áttekintést segíti a 5.6. ábra. Legyen ismert a merev test sebességállapotának A pontba redukált vektorkettőse $[\vec{\omega}; \vec{v}_A]_A$, és tegyük fel, hogy létezik a tétel állításának megfelelő Q pont. Ekkor az A és a Q pontok sebességvektorai az alábbi alakban írhatók

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A\parallel} + \vec{v}_{A\perp} = \frac{\vec{\omega} \cdot (\vec{v}_A \cdot \vec{\omega})}{\omega^2} + \frac{\vec{\omega} \times (\vec{v}_A \times \vec{\omega})}{\omega^2}, \quad (5.32)$$

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_{Q\parallel}. \quad (5.33)$$

Másrészt a Q pont sebessége a redukált vektorkettőssel az alábbi módon fejezhető ki

$$\begin{aligned} \vec{v}_Q &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AQ} = \vec{v}_{A\parallel} + \vec{v}_{A\perp} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AQ} = \\ &= \vec{v}_{A\parallel} + \frac{\vec{\omega} \times (\vec{v}_A \times \vec{\omega})}{\omega^2} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AQ}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

A második és a harmadik tag a Q pont sebességének szögsebességre merőleges összetevője $\vec{v}_{Q\perp}$, ami a tétel szerint nulla kell, hogy legyen

$$\vec{v}_{Q\perp} = \frac{\vec{\omega} \times (\vec{v}_A \times \vec{\omega})}{\omega^2} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AQ} = \vec{0}, \quad (5.35)$$

amiből átrendezéssel

$$\vec{\omega} \times \left(\frac{\vec{v}_A \times \vec{\omega}}{\omega^2} + \vec{r}_{AQ} \right) = \vec{0}. \quad (5.36)$$

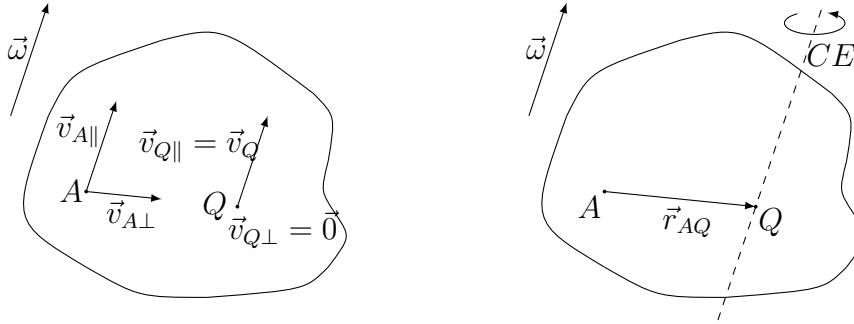
A bal oldalon csak akkor állhat nulla, ha a zárójelben levő kifejezés eltűnik, így

$$\vec{r}_{AQ} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_A}{\omega^2}. \quad (5.37)$$

Az \vec{r}_{AQ} relatív helyvektor mindig kiszámítható a sebességállapot redukált vektorkettősenek ismeretében, és ebből a Q pont helyvektora

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_A + \vec{r}_{AQ}. \quad (5.38)$$

□



(a) A sebességvektorok felbontása (b) A centrális egyenes (CE) helyzete

5.6. ábra. A centrális egyenesről szóló 5.6.3., 5.6.4., és 5.6.5. tételekhez

A 5.37. és 5.38. összefüggések fontos szerephez jutnak a számításokban, feladatok megoldásában.

5.6.4. Tétel (A szögsebességgel párhuzamosan mozgó pontok száma) Ha a merev test szögsebessége nem nulla, akkor végtelen sok olyan pont van a (merev testtel együttmozgónak képzelt) térben, amelynek nincs a szögsebességre merőleges sebességösszetevője, és ezek egy egyenesen helyezkednek el.

Bizonyítás. A 5.6.3. tétel szerint létezik legalább egy ilyen Q pont. A 5.6.1. tétel szerint a Q ponton áthaladó, a szögsebességgel párhuzamos egyenes mentén elhelyezkedő pontok sebessége egyenlő a Q pont sebességével. \square

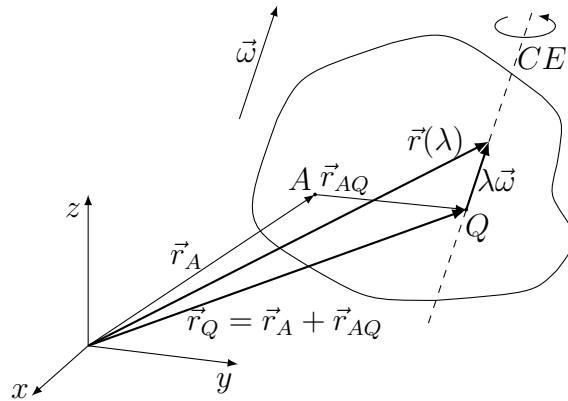
5.6.1. Definíció (Centrális egyenes) A merev test sebességállapotának centrális egyenese azon pontok halmaza, amelyeknek nincs a szögsebességre merőleges sebességösszetevőjük.

5.6.5. Tétel (A centrális egyenes iránya) A centrális egyenes párhuzamos a szögsebesség vektorral.

Bizonyítás. A 5.6.4. tétel alapján nyilvánvaló. \square

A centrális egyenesre a továbbiakban gyakran hivatkozunk a CE rövidítéssel. A centrális egyenes egyenlete az eddigiek alapján matematikai alakban is megadható, ha egy ismert pontja Q, mivel tudjuk, hogy egy irányvektora a szögsebesség vektor (5.7. ábra).

$$CE : \vec{r}(\lambda) = \vec{r}_Q + \lambda \cdot \vec{\omega} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (5.39)$$



5.7. ábra. A centrális egyenes (CE) paraméteres egyenlete (5.39.):
ha a λ paraméter $-\infty$ -től $+\infty$ -ig változik, akkor az $\vec{r}(\lambda)$ vektor végpontja végigfut a CE egyenesen, az ábrán éppen $0 < \lambda < 1$

5.7. A pillanatnyi sebességállapotok osztályozása

A merev test lehetséges pillanatnyi sebességállapotait négy osztályba sorolhatjuk a sebességállapot $[\vec{\omega}, \vec{v}_A]_A$ redukált vektorkettőse alapján. A "pillanatnyi" kifejezéssel azonos értelemben használatos az "elemi" elnevezés.

Ez az osztályozás alkalmat ad arra, hogy szemléletes képet alkossunk a mozgásformákról, és igen hasznos állításokat (tételeket) fogalmazzunk meg azokra.

A szögsebesség nulla vagy nem nulla volta alapján két csoportra osztjuk a sebességállapotokat. Az 1. csoporton belül az A és B osztályokat aszerint különböztetjük meg, hogy nulla vagy nem nulla a \vec{v}_A . A 2. csoporton belül viszont az osztályozás aszerint történik, hogy a redukált vektorkettős vektorainak skaláris szorzata eltűnik vagy sem. Az osztályozást a 5.2. táblázat mutatja be.

	$[\vec{\omega}, \vec{v}_A]_A$			
	$\vec{\omega} = \vec{0}$		$\vec{\omega} \neq \vec{0}$	
	$\vec{v}_A = \vec{0}$	$\vec{v}_A \neq \vec{0}$	$\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A = 0$	$\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A \neq 0$
osztály jele	1A	1B	2A	2B
osztály neve	pillanatnyi nyugalom	pillanatnyi haladó mozgás	pillanatnyi forgó mozgás	pillanatnyi csavar mozgás
centrális egyenes	nincs	nincs	van: pillanatnyi forgástengely	van: pillanatnyi csavartengely

5.2. táblázat. A merev test pillanatnyi sebességállapotainak osztályozása a redukált vektorkettős alapján

A pillanatnyi nyugalom állapotában a test minden pontjának sebessége nulla.

A pillanatnyi haladó mozgás másik neve pillanatnyi (elemi) transláció. Ebben az esetben a merev test minden pontjának azonos a sebessége: $\vec{v}_A = \vec{v}_B$.

Már bizonyítottuk a 5.5.5. tételt, amely kimondja, hogy a nulla szögsebességű mozgások esetén a merev test minden pontjának egyforma a sebessége. Ez vonatkozik a pillanatnyi nyugalom és a pillanatnyi haladó mozgás esetére is.

A pillanatnyi forgó mozgás másik neve pillanatnyi (elemi) rotáció.

5.7.1. Tétel (Pillanatnyi forgástengely pontjainak sebessége) Elemi forgómozgás esetén a centrális egyenes (pillanatnyi forgástengely) pontjainak sebessége nulla.

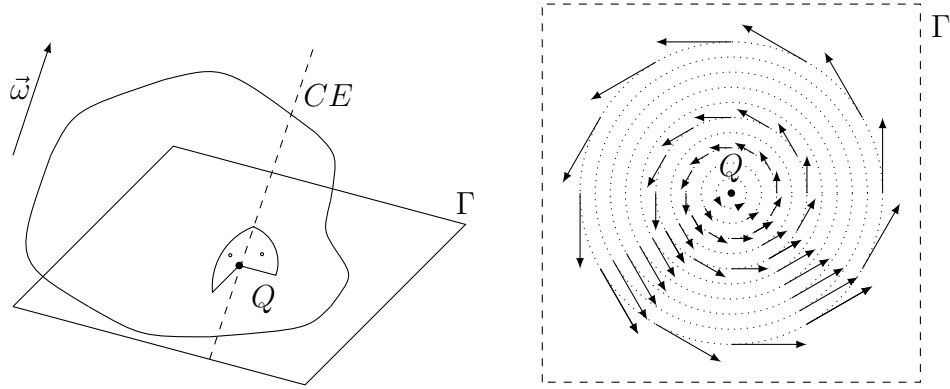
Bizonyítás. A centrális egyenes párhuzamos a szögsebességgel (5.6.5. tétel). A centrális egyenes pontjainak sebessége egymással egyenlő (5.6.2. tétel). A centrális egyenes egy tetszőleges pontjának sebességét jelölje \vec{v}_{CE} , ezt írjuk fel a szögsebességre merőleges és azzal párhuzamos komponensek összegeként:

$$\vec{v}_{CE} = \vec{v}_{CE||} + \vec{v}_{CE\perp} \quad (5.40)$$

A centrális egyenes definíciója miatt $\vec{v}_{CE\perp} = \vec{0}$ (5.6.1. definíció).

Az elemi forgómozgás esetén fennálló $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A = 0$ feltétel miatt $\vec{v}_{CE\parallel} = \vec{0}$. \square

5.7.1. Definíció (Sebességpólus) Az elemi forgómozgást végző test centrális egyenesének egy szögsebességre merőleges síkkal képzett metszéspontját az adott síkhoz tartozó sebességpólusnak nevezzük.



5.8. ábra. A pillanatnyi forgó mozgás sebességállapota, Q a sebességpólus jele, a nyilak a sebességvektorokat jelképezik

Ha az elemi forgó mozgás sebességállapotát a centrális egyenesre redukáljuk, azaz az A Pont rajta van a centrális egyenesen, akkor a redukált vektorkettős

$$[\vec{\omega}, \vec{0}]_A \quad (5.41)$$

alakú. Ebben az esetben a test pontjainak sebessége

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \quad (5.42)$$

alakban adható meg. Ebből leolvasható, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott, szögsebességre merőleges síkon minden pont sebességvektora merőleges a sebességpólus köré írt kör sugarára, hossza pedig arányos a sugárral. Ezt szemlélteti a 5.8. ábra. A pillanatnyi csavarmozgásról az alábbi tételek fogalmazhatók meg.

5.7.2. Tétel (A pillanatnyi csavartengely pontjainak sebessége) A pillanatnyi csavartengely pontjai a szögsebesség vektorral párhuzamosan mozognak.

Bizonyítás. A centrális egyenes egy tetszőleges pontjának sebességét jelölje \vec{v}_{CE} , ezt írjuk fel a szögsebességre merőleges és azzal párhuzamos komponensek összegeként:

$$\vec{v}_{CE} = \vec{v}_{CE||} + \vec{v}_{CE\perp} \quad (5.43)$$

A centrális egyenes definíciója miatt $\vec{v}_{CE\perp} = \vec{0}$ (5.6.1. definíció).

Az elemi forgómozgás esetén fennálló $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A \neq 0$ feltétel miatt biztosan $\vec{v}_{CE||} \neq \vec{0}$. \square

5.7.3. Tétel (Pillanatnyi csavarmozgást végző test pontjainak sebessége) A pillanatnyi csavarmozgást végző test pontjainak szögsebességgel párhuzamos sebességkomponense egyenlő.

Bizonyítás. Legyen a sebességállapot redukált vektorkettőse $[\vec{\omega}, \vec{v}_A]$, ahol A a test egy tetszőleges pontja. Bontsuk fel a \vec{v}_A vektort a szögsebességgel párhuzamos és arra merőleges összetevőkre.

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A||} + \vec{v}_{A\perp} \quad (5.44)$$

A test egy másik, tetszőleges pontjának sebessége:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} = \underbrace{\vec{v}_{A||}}_{\vec{v}_{B||}} + \underbrace{\vec{v}_{A\perp} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}}_{\vec{v}_{B\perp}} \quad (5.45)$$

Leolvasható, hogy

$$\vec{v}_{A||} = \vec{v}_{B||}. \quad (5.46)$$

\square

A 5.7.3. tétel még gyorsabban belátható, ha visszaemlékezünk a 5.5.4. tételre, miszerint a merev test általános mozgása mindig előállítható egy rotáció és egy transláció összegeként.

5.8. A merev test gyorsulásállapota

5.8.1. Tétel (Merev test pontjainak relatív gyorsulása és relatív helyvektora)

A merev test pontjainak relatív gyorsulása és relatív helyvektora mindig tompaszöget zárnak be, azaz fennáll közöttük az

$$\vec{a}_{AB} \cdot \vec{r}_{AB} \leq 0 \quad (5.47)$$

összefüggés.

Bizonyítás. A bizonyítást a 5.5.1. tételből indítjuk.

$$\vec{v}_{AB} \cdot \vec{r}_{AB} = 0 \quad / \frac{d}{dt} \quad (5.48)$$

$$\dot{\vec{v}}_{AB} \cdot \vec{r}_{AB} + \vec{v}_{AB} \cdot \dot{\vec{r}}_{AB} = 0 \quad (5.49)$$

$$\vec{a}_{AB} \cdot \vec{r}_{AB} + \underbrace{\vec{v}_{AB} \cdot \vec{v}_{AB}}_{\vec{v}_{AB}^2 \geq 0} = 0 \quad / - \vec{v}_{AB}^2 \quad (5.50)$$

$$\vec{a}_{AB} \cdot \vec{r}_{AB} = - \vec{v}_{AB}^2 \leq 0 \quad (5.51)$$

□

5.8.2. Tétel (Merev test tetszőleges pontjának gyorsulása) A merev test tetszőleges pontjának gyorsulása kiszámítható az

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}) \quad (5.52)$$

összefüggéssel.

Bizonyítás. A sebességállapotot leíró egyenlőségből indulunk ki.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \quad / \frac{d}{dt} \quad (5.53)$$

$$\dot{\vec{v}}_B = \dot{\vec{v}}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{AB} \quad (5.54)$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{AB} \quad (5.55)$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}) \quad (5.56)$$

Az utolsó lépésben kihasználtuk a

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \implies \vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{v}_{AB} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \text{ összefüggést.} \quad \square$$

A merev test gyorsulásállapotának megadásához három vektor szükséges (a geometriai adatokon túl): egy tetszőleges pont gyorsulásvektora, a szögsebesség és a szöggyorsulás: $\{\vec{a}_A, \vec{\omega}, \vec{\varepsilon}\}$.

Ha a merev test síkmozgást végez, akkor ez az összefüggés a következő alakra egyszerűsödik:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} - \omega^2 \vec{r}_{AB} \quad (5.57)$$

Merev test síkmozgása esetén a sebesség és gyorsulásvektorok párhuzamosak az ún. alapsíkkal, a szögsebesség és a szöggyorsulás pedig merőlegesek arra.

5.8.1. Definíció (Gyorsuláspólus) A merev test síkmozgása esetén a test azon pontját, amelynek gyorsulásvektora nullvektor, pillanatnyi gyorsuláspólusnak nevezzük.

Jelöljük a gyorsuláspólust P betűvel. Ha a 5.57. egyenlet alkalmazásakor az A pontot úgy választjuk meg, hogy éppen egybeessék a gyorsuláspólussal, akkor egy tetszőleges B pont gyorsulása így kapható meg:

$$\vec{a}_B = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{PB} - \omega^2 \vec{r}_{PB} \quad (5.58)$$

Ebből a gyorsuláspólus relatív helyvektora kifejezhető. A 5.58. egyenlőséget kétféleképp alakítjuk: egyszer megszorozzuk vektoriálisan balról a szöggyorsulás vektorral (itt kihasználjuk a kétszeres vektori szorzatra vonatkozó azonosságot, ami a függelékben megtalálható), másodszor megszorozzuk a szögsebesség négyzetével:

$$\vec{a}_B = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{PB} - \omega^2 \vec{r}_{PB} \quad / \vec{\varepsilon} \times \quad (5.59)$$

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{a}_B = -\varepsilon^2 \vec{r}_{PB} - \omega^2 \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{PB} \quad (5.60)$$

$$\vec{a}_B = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{PB} - \omega^2 \vec{r}_{PB} \quad / \cdot \omega^2 \quad (5.61)$$

$$\omega^2 \vec{a}_B = \omega^2 \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{PB} - \omega^4 \vec{r}_{PB} \quad (5.62)$$

Most adjuk össze a 5.60. és 5.62. egyenleteket. Az $\omega^2 \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{PB}$ kifejezés ki fog esni, mert ellenkező előjellel szerepel a két egyenletben. Ezt kapjuk:

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{a}_B + \omega^2 \vec{a}_B = -(\varepsilon^2 + \omega^4) \vec{r}_{PB} \quad (5.63)$$

$$\implies \vec{r}_{PB} = -\frac{\vec{\varepsilon} \times \vec{a}_B + \omega^2 \vec{a}_B}{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (5.64)$$

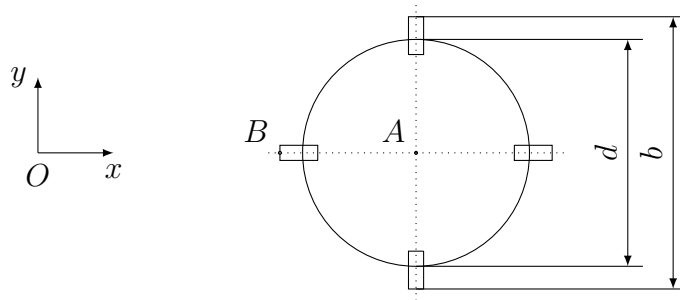
$$\implies \vec{r}_{BP} = \frac{\vec{\varepsilon} \times \vec{a}_B + \omega^2 \vec{a}_B}{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (5.65)$$

Ebből megadható a gyorsuláspólus helyvektora:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_B + \vec{r}_{BP}. \quad (5.66)$$

5.9. Számítási példák (merev test kinematikája)

5.9.1. Feladat. A rotációs fűkaszaat egyszerűsítve úgy képzeljük el, mintha a munkavégző része a 5.9. ábra síkjában lenne és a lengőkések mereven csatlakoznának a forgórészhez.



5.9. ábra. Az egyszerűsített rotációs fűkasza munkavégző részének felülnézeti vázlatrajza (nem méretarányos)

Az ábrán jelölt méretek $d = 500 \text{ mm}$, $b = 620 \text{ mm}$. Az A pont sebessége $\vec{v}_A = 7.2 \vec{e}_x \frac{\text{km}}{\text{h}}$, gyorsulása $\vec{a}_A = 1 \vec{e}_x \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, fordulatszáma állandó $n = 2100 \frac{1}{\text{min}}$, a forgásirány az ábrán az óramutató járásával ellentétes. Az A pont a koordináta-rendszer x tengelyén, az O origótól 5 m távolságban helyezkedik el.

- Sorolja osztályba a pillanatnyi sebességállapotot!
- Számítsa ki és adja meg a B pont sebességét,
- a sebességpólus helyvektorát,
- a sebességállapot centrális egyenesének egyenletét,
- a B pont gyorsulását,
- a gyorsuláspólus helyvektorát!

Megoldás

A mértékegységeket váltsuk át úgy, hogy összhangban legyenek. A forgórész az ábrára merőleges tengely körül forog, ami párhuzamos a z tengellyel, ez

egyben a szögsebesség iránya is. Redukáljuk a sebességállapotot az A pontba, a redukált vektorkettős:

$$[\vec{\omega}; \vec{v}_A]_A = [219.91\vec{e}_z \frac{1}{s}; 2\vec{e}_x \frac{m}{s}]_A. \quad (5.67)$$

(A szögsebesség mértékegységét $\frac{\text{rad}}{s}$ formában is lehet érteni.)

a) Mivel $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ és $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A = 0$ a sebességállapot pillanatnyi forgó mozgás (2A sebességosztály).

b) Az A pontból a B pontba mutató relatív helyvektor: $\vec{r}_{AB} = -0.31\vec{e}_x$ m. A B pont sebessége:

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} = 2\vec{e}_x + 219.91\vec{e}_z \times (-0.31\vec{e}_x) \frac{m}{s} = \\ &= 2\vec{e}_x - 68.17\vec{e}_y \frac{m}{s} \end{aligned} \quad (5.68)$$

c) A sebességpólust jelölje D .

$$\begin{aligned} \vec{r}_{AD} &= \frac{\vec{v}_A \times \vec{\omega}}{\omega^2} = \frac{2\vec{e}_x \times 219.91\vec{e}_z}{219.91^2} m = \\ &= -0.00909\vec{e}_y m = -9.09\vec{e}_y \text{ mm} \end{aligned} \quad (5.69)$$

A sebességpólus közel van tehát a forgórész A geometriai középpontjához, de nem esik egybe azzal. Akkor esne egybe, ha $\vec{v}_A = \vec{0} \frac{m}{s}$ lenne, ekkor a \vec{r}_{AD} vektorra nulla adódna.

d) Az A pont helyvektora a feladat szövege szerint $\vec{r}_A = 5\vec{e}_x$ m. A D pont helyvektora

$$\vec{r}_D = \vec{r}_A + \vec{r}_{AD} = 5\vec{e}_x m - 0.00909\vec{e}_y m. \quad (5.70)$$

Ebből a centrális egyenes egyenlete:

$$CE : \vec{r}(\lambda) = \vec{r}_D + \lambda\vec{\omega} = 5\vec{e}_x m - 0.00909\vec{e}_y + \lambda 219.91\vec{e}_z m, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (5.71)$$

Mivel a λ tetszőleges valós szám lehet, a szögsebesség hossza elhagyható:

$$CE : \vec{r}(\lambda) = 5\vec{e}_x m - 0.00909\vec{e}_y + \lambda\vec{e}_z m, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (5.72)$$

e) A szöggyorsulás nulla, mert a szögsebesség állandó. A tárcsa síkmozgást végez. A B pont gyorsulása:

$$\begin{aligned} \vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} - \omega^2 \vec{r}_{AB} = \\ &= 1\vec{e}_x - 219.91^2 \cdot (-0.31\vec{e}_x) \frac{m}{s^2} = 14992.72\vec{e}_x \frac{m}{s^2}. \end{aligned} \quad (5.73)$$

f) A gyorsuláspólust jelölje P . A gyorsuláspólus A ponthoz viszonyított relatív helyvektora:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{AP} &= \frac{\vec{\varepsilon} \times \vec{a}_P + \omega^2 \vec{a}_P}{\varepsilon^2 + \omega^4} = \\ &= \frac{\vec{0} + \omega^2 \cdot 1\vec{e}_x}{0 + \omega^4} \text{ m} = 0.00002\vec{e}_x \text{ m} = 0.02\vec{e}_x \text{ mm.}\end{aligned}\quad (5.74)$$

A gyorsuláspólus helyvektora:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_{AP} = 5.00002\vec{e}_x \text{ m.} \quad (5.75)$$

A gyorsuláspólus még közelebb van a forgórész geometriai középpontjához, mint a sebességpólus, de x irányba kissé eltér attól. ✓

6.

A merev test dinamikája

6.1. A merev test tömegeloszlása, tömege

A merev testet folytonos tömegeloszlásúnak képzeljük el. A folytonos tömegeloszlású testet kontínuumnak is nevezik. Képzeletben osszuk fel végtelen sok, infinitezimálisan kicsi részre (6.1. ábra). Minden \vec{r} helyvektorú pontja infinitezimálisan kicsiny környezetének dV térfogatában dm tömegű anyag található. A dm tömeg nem feltétlenül ugyanakkora a különböző helyen lévő, azonos nagyságú dV térfogatokban. A differenciálisan kicsi dV térfogat neve térfogatelem, a dm tömeg neve tömegelem.

6.1.1. Definíció (Tömegsűrűség) A merev test ρ tömegsűrűsége egy \vec{r} helyvektorral jellemzett pontjában

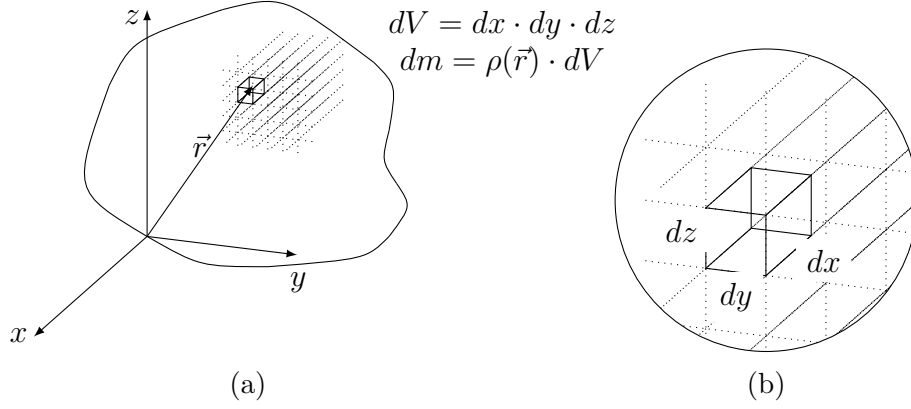
$$\rho(\vec{r}) = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{dm(\vec{r})}{dV} \quad (6.1)$$

.

6.1.2. Definíció (Homogén tömegeloszlás) A test tömegeloszlását homogénnek nevezzük, ha a tömegsűrűsége nem függ a helytől, azaz

$$\rho(\vec{r}) = \rho = \text{állandó}. \quad (6.2)$$

Annak ellenére, hogy a homogén tömegeloszlás egy speciális, sőt idealizált eset, fontos szerepe van az elméleti megfontolásokban és az alkalmazásokban is. A gyakorlatban sokszor kívánatos cél olyan alkatrészek (gépelemek, építészeti elemek stb.) gyártása, amelyeknek az anyagi tulajdonságai nem



6.1. ábra. A térfogatelem, a tömegsűrűség és a tömegelem kapcsolata

változnak az alkatrész belsejében, ami általában úgy valósítható meg, hogy minden pontban ugyanaz az anyagminőség, ebből fakadóan a tömegsűrűség is. Gyártási hibáktól mentes alkatrészek esetén jó közelítéssel homogén tömegeloszlásúnak tekinthetjük azokat. Az elméletben, mint majd látni fogjuk, a homogén tömegeloszlású testekre vonatkozó összefüggések egyszerűsödnek azért, mert az állandó sűrűség kiemelhető az integrálásból vagy más műveletekből.

A merev test m tömege a dm tömegelemek összege, ami integrálással számítható ki.

$$m = \int_{(m)} dm = \int_{(V)} \rho(\vec{r}) dV. \quad (6.3)$$

A (V) és (m) jelölések az integrálási változóhoz igazodnak, mindkettő azt fejezi ki, hogy az integrálást a test teljes tartományára kell elvégezni. Homogén tömegeloszlás esetén az általános iskolából ismert összefüggéshez jutunk

$$m = \int_{(m)} dm = \int_{(V)} \rho dV = \rho \int_{(V)} dV = \rho V. \quad (6.4)$$

6.2. Statikai nyomaték, tömegközéppont

6.2.1. Definíció (Elemi statikai nyomaték) A merev test \vec{r} helyvektorú tömegelemének elemi statikai nyomatéka a tér tetszőleges A pontjára vonatkozóan

$$d\vec{S}_A = (\vec{r} - \vec{r}_A) dm. \quad (6.5)$$

A merev test tömegelemének elemi statikai nyomatéka a koordináta-rendszer O kezdőpontjára vonatkozóan

$$d\vec{S}_O = \vec{r} dm. \quad (6.6)$$

6.2.2. Definíció (Kontinuum statikai nyomatéka) A test statikai nyomatéka a tér tetszőleges A pontjára vonatkozóan

$$\vec{S}_A = \int_{(m)} (\vec{r} - \vec{r}_A) dm = \int_{(V)} (\vec{r} - \vec{r}_A) \rho(\vec{r}) dV. \quad (6.7)$$

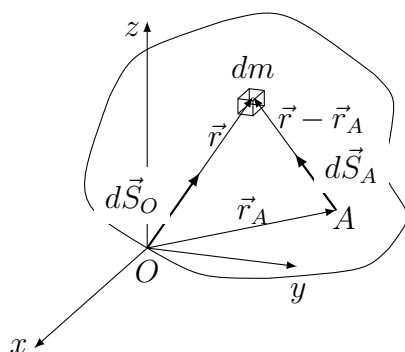
A test statikai nyomatéka a koordináta-rendszer kezdőpontjára vonatkozóan

$$\vec{S}_O = \int_{(m)} \vec{r} dm = \int_{(V)} \vec{r} \rho(\vec{r}) dV. \quad (6.8)$$

A statikai nyomaték vektormennyiség, a mértékegysége kgm .

A test egy tetszőleges A pontra, és a koordináta-rendszer O pontjára vonatkozó statikai nyomatéka közötti összefüggés:

$$\begin{aligned} \vec{S}_A &= \int_{(m)} (\vec{r} - \vec{r}_A) dm = \int_{(m)} \vec{r} dm - \int_{(m)} \vec{r}_A dm = \\ &= \int_{(m)} \vec{r} dm - \vec{r}_A \int_{(m)} dm = \vec{S}_O - \vec{r}_A m. \end{aligned} \quad (6.9)$$



6.2. ábra. A statikai nyomaték

Mivel a statikai nyomaték függ a vonatkoztatási ponttól, felmerülhet a kérdés, hogy létezik-e olyan pont, amelyre a statikai nyomaték nulla. Úgy mutatjuk meg az ilyen pont létezését, hogy eljárást adunk helyvektorának kiszámítására (6.2.1. tétel). Ki fog derülni, hogy ennek a pontnak, az ún. tömegközéppontnak fontos szerepe van a merev test dinamikájában.

6.2.3. Definíció (Kontinuum tömegközéppontja) Egy kiterjedt test tömegközéppontjának nevezzük a térnek azt a pontját, amelyre vonatkozóan a test statikai nyomatéka nulla.

A tömegközéppont jele T .

6.2.1. Tétel (Kontinuum tömegközéppontjának helyvektora) Egy kiterjedt test T tömegközéppontjának helyvektora

$$\vec{r}_T = \frac{\vec{S}_O}{m} = \frac{\int_{(m)} \vec{r} dm}{\int_{(m)} dm}. \quad (6.10)$$

Bizonyítás. A tömegközéppont definíciójából indulunk ki, majd a 6.9. egyenlőséget alkalmazzuk A helyett T pontra.

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \vec{S}_T = \int_{(m)} (\vec{r} - \vec{r}_T) dm = \vec{S}_O - \vec{r}_T m, \\ \vec{0} &= \vec{S}_O - \vec{r}_T m, \\ \vec{r}_T &= \frac{\vec{S}_O}{m}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

□

A tömegközéppont helyvektorának megkeresésekor felmerülő, a bizonyítás gondolatmenetéből adódó

$$\vec{S}_O = \vec{r}_T m \quad (6.12)$$

egyenlőség úgy is interpretálható, hogy a kiterjedt testnek a koordináta-rendszer kezdőpontjára vonatkozó statikai nyomatéka egyenlő egy olyan tömegpontnak az origóra vonatkozó statikai nyomatékával, amelynek tömege éppen a test tömegével egyezik meg, helye pedig a tömegközépponttal esik egybe. Ezért azt mondjuk, hogy a kiterjedt test a *statikai nyomaték szempontjából* egyenértékű, és ezért helyettesíthető ezzel a tömegponttal. Összetett alakzatok tömegközéppontjának kiszámításakor gyakran kihasználjuk ezt a lehetőséget.

Az alábbi tétel igen hatékonyan alkalmazható, ha egy összetett alakú testet fel tudunk bontani olyan résztartományokra, amelyeknek tömegközéppontjait külön-külön könnyen meg lehet határozni.

6.2.2. Tétel (Tömegközéppont számítása résztartományokból) Egy m tömegű test tömegközéppontjának \vec{r}_T helyvektora megkapható a test V_1, V_2, \dots, V_n résztartományai tömegközéppontjainak $\vec{r}_{T1}, \vec{r}_{T2} \dots \vec{r}_{Tn}$ helyvektorainak m_1, m_2, \dots, m_n tömegekkel súlyozott középértékeként.

$$\vec{r}_T = \frac{m_1 \vec{r}_{T1} + m_2 \vec{r}_{T2} + \dots + m_n \vec{r}_{Tn}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{Ti}}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{Ti}}{m}. \quad (6.13)$$

Bizonyítás. A bizonyítás azon alapul, hogy egy véges tartományon vett határozott integrál értéke megkapható a résztartományokon kiszámított integrálok összegeként. A test által kitöltött V térbeli tartományt bontsuk n darab résztartományra, így V a résztartományok uniója $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n = \cup_{i=1}^n V_i$. A test tömege: $m = \int_{(V)} dm$, az i . résztartomány tömege: $m_i = \int_{(V_i)} dm$. A tömegekre nyilvánvaló, hogy

$$m = \int_{(V)} dm = \int_{(\cup_{i=1}^n V_i)} dm = \sum_{i=1}^n \int_{(V_i)} dm = \sum_{i=1}^n m_i. \quad (6.14)$$

A test tömegközéppontja: $\vec{r}_T = \frac{\int_{(V)} \vec{r} dm}{m}$. Egy résztartomány tömegközéppontja: $\vec{r}_{Ti} = \frac{\int_{(V_i)} \vec{r} dm}{m_i}$, ebből $\vec{r}_{Ti} m_i = \int_{(V_i)} \vec{r} dm$. Az eddigiek alapján a test tömegközéppontjára vonatkozó összefüggés átalakítható:

$$\vec{r}_T = \frac{\int_{(V)} \vec{r} dm}{m} = \frac{\int_{(\cup_{i=1}^n V_i)} \vec{r} dm}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n \int_{(V_i)} \vec{r} dm}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{Ti}}{m}. \quad (6.15)$$

Ez az, amit bizonyítani kellett.

Kiegészítés a bizonyításhoz. A bizonyítás lényege szemléletesen megközelíthető a statikai nyomaték szempontjából értelmezett egyenértékűség és helyettesítés oldaláról is. Az egyes V_i résztartományokat helyettesítjük olyan tömegpontokkal, amelyek tömege m_i , helye pedig \vec{r}_{Ti} , majd az így adódó n darab tömegpont közös tömegközéppontját számítjuk ki. Épp ezt fejezi ki a 6.13. összefüggés. \square

6.2.3. Tétel (Homogén tömegeloszlású kontinuum tömegközéppontja) Homogén tömegeloszlás esetén a tömegközéppont helye nem függ a sűrűségtől.

Bizonyítás.

$$\vec{r}_T = \frac{\int_{(m)} \vec{r} dm}{\int_{(m)} dm} = \frac{\int_{(V)} \vec{r} \rho dV}{\int_{(V)} \rho dV} = \frac{\rho \int_{(V)} \vec{r} dV}{\rho \int_{(V)} dV} = \frac{\rho \int_{(V)} \vec{r} dV}{\rho V} = \frac{\int_{(V)} \vec{r} dV}{V}. \quad (6.16)$$

□

6.3. A tömegközéppont és a szimmetria

A tömegközéppont helye szoros összefüggésben áll a szimmetriával. Egy kiterjedt test tömegeloszlása akkor szimmetrikus, ha van tükörsíkja, forgási szimmetriatengelye, és/vagy szimmetriaközéppontja. A test *alakjának* szimmetriájából nem feltétlenül következik a tömegeloszlás szimmetriája. Példa lehet erre egy *nem* homogén tömegeloszlású kocka vagy gömb.

Legyen a test egy bizonyos \vec{r} helyvektorú helyén a sűrűség $\rho(\vec{r})$, a tömegelem $dm = \rho(\vec{r})dV$. Egy szimmetriaművelet jele legyen S . A szimmetria az \vec{r} pontot az $S(\vec{r})$ pontba viszi át. A tömegeloszlás szimmetriája pontosan azt jelenti, hogy

- ha az \vec{r} pont a testhez tartozik, akkor az $S(\vec{r})$ pont is része a testnek, és
- a sűrűség mindkét pontban egyforma, azaz $\rho(\vec{r}) = \rho(S(\vec{r}))$.

Ebből következik, hogy a szimmetriaművelettel összekapcsolt pontokban levő $dm(\vec{r}) = \rho(\vec{r})dV$ és $dm(S(\vec{r})) = \rho(S(\vec{r}))dV$ tömegelemek egyformák.

6.3.1. Tétel (A tömegközéppont és a tömegeloszlás szimmetriája) A tömegeloszlás szimmetriaelemei mindig tartalmazzák a tömegközéppontot.

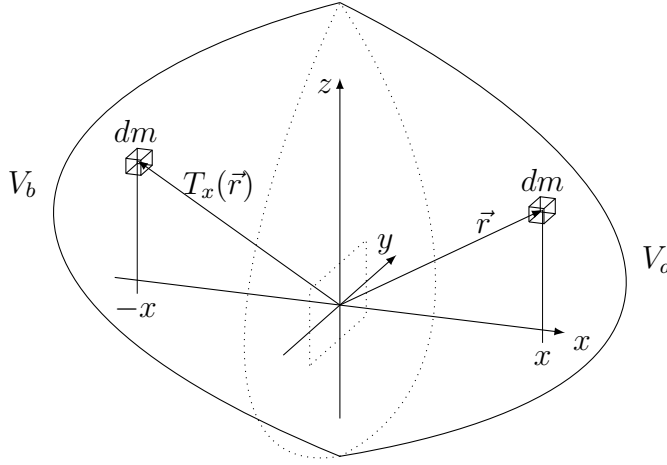
Bizonyítás. A tükörsík esete. Ha a kiterjedt test tömegeloszlásának van tükörsíkja, akkor válasszuk meg a koordináta-rendszert úgy, hogy a tükörsík egybeessen a z-y koordinátasíkkal, és jelölje T_x a z-y síkra való tükrözés műveletét. Szemeljünk ki egy tetszőleges tömegelemet, amelynek helyvektora

legyen $\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, a tömegsűrűség ebben a pontban $\rho(\vec{r})$, így $dm(\vec{r}) = \rho(\vec{r})dV$.

Ennek a pontnak a tükörképe a z-y síkra a $T_x(\vec{r}) = \begin{bmatrix} -x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ helyen található,

és a tömegeloszlás tükörszimmetriája miatt a tömegsűrűségre teljesül a $\rho(\vec{r}) = \rho(T_x(\vec{r}))$ összefüggés, ebből következően azok a tömegelemek, amelyek

egymás tükörképei, egyenlők: $dm(T_x(\vec{r})) = \rho(T_x(\vec{r}))dV = \rho(\vec{r})dV = dm(\vec{r})$. A z - y sík két részre osztja a test által kitöltött V tértartományt, ezek legyenek V_a és V_b , nyilván $V = V_a \cup V_b$. A tükörszimmetria miatt $V_b = T_x(V_a)$, ami azt jelenti, hogy bármely V_a tartománybeli pontnak a tükörképe is része a testnek, és a V_b tartományban található úgy, hogy a hozzájuk tartozó tömegelemek egyenlők, de x koordinátájuk ellentett (6.3. ábra).



6.3. ábra. A szimmetriasík tartalmazza a tömegközéppontot. A két dm tömegelem a szimmetria miatt egyenlő.

A 6.10. összefüggés alapján a tömegközéppont helye:

$$\vec{r}_T = \frac{\int_{(m)} \vec{r} dm}{m}. \quad (6.17)$$

Fordítsuk figyelmünket a számlálóra:

$$\int_{(m)} \vec{r} dm = \int_{(m)} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} dm = \begin{bmatrix} \int_{(m)} x dm \\ \int_{(m)} y dm \\ \int_{(m)} z dm \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

A bizonyítás szempontjából csak az x koordináta lényeges, ezért a továbbiakban ezt vizsgáljuk:

$$\int_{(m)} x dm = \int_{(V)} x \rho(\vec{r}) dV. \quad (6.19)$$

Az integrálást bontsuk fel a két tartományra, és használjuk ki a szimmetriát:

$$\begin{aligned}
 \int_{(V)} x\rho(\vec{r})dV &= \int_{(V_a)} x\rho(\vec{r})dV + \int_{(V_b)} x\rho(\vec{r})dV = \\
 &= \int_{(V_a)} x\rho(\vec{r})dV + \int_{(V_a)} T_x(x)\rho(T_x(\vec{r}))dV = \\
 &= \int_{(V_a)} x\rho(\vec{r})dV + \int_{(V_a)} (-x)\rho(\vec{r})dV = \\
 &= \int_{(V_a)} x\rho(\vec{r})dV - \int_{(V_a)} x\rho(\vec{r})dV = 0. \quad (6.20)
 \end{aligned}$$

A tömegközéppont helyvektora az alábbi alakba írható:

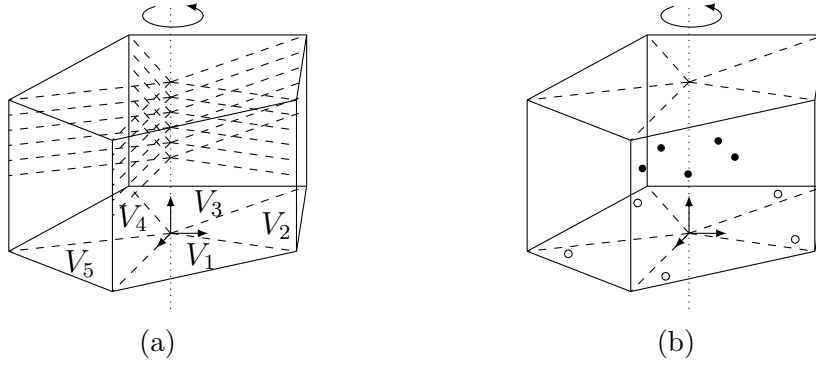
$$\vec{r}_T = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 \\ \int_{(m)} y dm \\ \int_{(m)} z dm \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

A tükörszimmetriából tehát az következik, hogy a tömegközéppontnak a tükörsíktól való távolsága (itt az x koordináta) nulla, vagyis a tükörsík tartalmazza a tömegközéppontot. A bizonyítás általános érvényű, mert a koordináta-rendszer mindig megválasztható úgy, hogy a z - y sík egybeessen a tükörsíkkal.

A forgási szimmetriatengely esete. A forgási szimmetriatengelyt n -értékűnek nevezzük, ha a testet a tengely körül teljes szögben megforgatva, n alkalommal kerül önmagával fedésbe. A fedésbe itt beleértendő a tömegeloszlás is. A forgástengely értékűsége bármilyen természetes szám lehet. Leggyakrabban az $n = 2, 3, 4, 5, 6, 8, \dots, \infty$ esetek fordulnak elő. Az $n = \infty$ a gömb- és a hengerszimmetria jellemzői. Vizsgáljuk először a véges n esetét. A koordináta-rendszert úgy választjuk meg, hogy z tengelye egybeessen az n -értékű forgási szimmetriatengellyel. A z tengely körüli $\varphi_n = \frac{2\pi}{n} rad$ szögű forgatást jelölje R_{zn} . A test által kitöltött V tértartomány felosztható n darab résztartományra úgy, hogy $V = \cup_{i=1}^n V_i$ és az R_{zn} forgatás ezeket a résztartományokat egymásba viszi át: $(R_{zn})^k V_1 = V_{k+1}, k = 0 \dots n-1$. Itt az $(R_{zn})^k$ jelölés az R_{zn} forgatás k alkalommal történő egymás utáni végrehajtását jelöli.

A tömegközéppont helyét az alapösszefüggésből (6.10.) kiindulva számítjuk most is:

$$\vec{r}_T = \frac{\int_{(m)} \vec{r} dm}{m}. \quad (6.22)$$

6.4. ábra. A forgási szimmetriatengely és a tömegközéppont $n=5$

A számlálót alakítjuk tovább a szimmetria kihasználásával:

$$\begin{aligned}
 \int_{(m)} \vec{r} dm &= \int_{(V)} \vec{r} \rho(\vec{r}) dV = \\
 &= \int_{(V_1)} \vec{r} \rho(\vec{r}) dV + \int_{(V_2)} \vec{r} \rho(\vec{r}) dV + \dots + \int_{(V_n)} \vec{r} \rho(\vec{r}) dV = \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{(V_i)} \vec{r} \rho(\vec{r}) dV = \sum_{i=1}^n \int_{(R_{nz}^i(V))} \vec{r} \rho(\vec{r}) dV = \int_{(V_1)} \sum_{i=1}^n R_{nz}^i(\vec{r}) \rho(R_{nz}^i(\vec{r})) dV = \\
 &= \int_{(V_1)} \sum_{i=1}^n R_{nz}^i(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV = \int_{(V_1)} (R_{nz}(\vec{r}) + R_{nz}^2(\vec{r}) + \dots + R_{nz}^n(\vec{r})) \rho(\vec{r}) dV.
 \end{aligned}
 \tag{6.23}$$

Az integrandus n darab olyan pont helyvektorának összegét tartalmazza, amelyeket az n -edrendű forgási szimmetriatengely körüli forgatás visz át egymásba. Ebből következően ezek a pontok egy olyan szabályos n -szög csúcspontjai, amely az x - y síkkal párhuzamos síkban fekszik, körülírt körének középpontja pedig a z tengelyen található. A függelékben részletezett 7.3.2. tétel szerint egy sokszög körülírt körének középpontjából a sokszög csúcsaiba mutató vektorok összege épp a körülírt kör középpontjába mutat (ha itt az origó, akkor nullvektor). Ebből az következik, hogy az integrandusban levő összeg x és y koordinátája nulla, csak a z koordinátája különbözik nullától. Ezzel beláttuk, hogy a tömegközéppont a forgási szimmetriatengelyre illeszkedik. Végtelen rendű szimmetria esetén a bizonyítás hasonló, de nem részletezzük.

A *szimmetriacentrum esete* úgy tárgyalható legegyszerűbben, ha figyelembe vesszük, hogy a középpontos szimmetria helyettesíthető egy tükrözéssel és egy forgatással. Így ezt az esetet visszavezettük az előzőekre. Vegyük észre, hogy a tömegközéppont ez esetben rajta van a szimmetriasíkon, és a rá merőleges forgási szimmetriatengelyen is, ez egyszerre akkor teljesülhet, ha

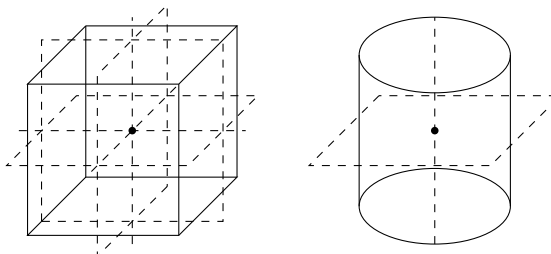
a tömegközéppont a két alakzat metszetét jelentő egyetlen pontban van, ami nem más, mint a szimmetriaközéppont. \square

6.3.2. Tétel (Homogén szimmetrikus test tömegközéppontja) Ha a test tömegeloszlása homogén, akkor a test alakjának szimmetriaelemei tartalmazzák a tömegközéppontot.

Bizonyítás. A 6.2.3. és 6.3.1. tételek alapján nyilvánvaló. \square

Ha egy testnek több szimmetriasíkja és forgási szimmetriatengelye van, akkor azok mind tartalmazzák a tömegközéppontot. A szimmetriaelemek közös pontjainak halmazában van a tömegközéppont is. Itt nem bizonyítjuk, de fontos, hogy a szimmetriaelemek nem diszjunktak, ami azt jelenti, hogy legalább egy közös pontjuk mindig van. Ezért elegendően magas szimmetriával rendelkező tömegeloszlás esetén a szimmetriaelemeknek csak egy közös pontja van, ami ez esetben a tömegközépponttal azonos.

A műszaki gyakorlatban gyakran találkozunk szimmetrikus testekkel, ezért a szimmetria hatékony segítség a tömegközéppont meghatározásában. A szimmetria kihasználásával elkerülhetők az integrálással együtt járó esetleges matematikai nehézségek.



6.5. ábra. Példák a tömegközéppont helyére homogén tömegeloszlású szimmetrikus testek esetén

6.4. Az impulzus

A folytonos tömegeloszlású merev test pillanatnyi sebességállapotát jellemezze az $[\vec{\omega}; \vec{v}_A]_A$ redukált vektorkettős, tömegsűrűség eloszlása legyen $\rho(\vec{r})$.

Egy tetszőlegesen kiválasztott, \vec{r} helyvektorú pontjának sebessége $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_A)$. Az \vec{r} helyvektor infinitezimálisan kicsiny dV környezetében található a $dm = \rho(\vec{r})dV$ tömegelem.

A dm tömegelem impulzusa, az ún. $d\vec{I}$ elemi impulzus a következőképpen számítható:

$$d\vec{I} = \vec{v}dm. \quad (6.24)$$

6.4.1. Definíció (Impulzus vektorrendszer) A merev test összes dm tömegeleméhez rendelt $d\vec{I}$ elemi impulzus vektorok halmazát a merev test impulzus vektorrendszerének nevezzük.

6.4.1. Tétel (A merev test impulzusa) A merev test impulzusa a tömegközéppont sebességéből és a test tömegéből kiszámítható:

$$\vec{I} = m\vec{v}_T. \quad (6.25)$$

Bizonyítás. A merev test impulzusa az elemi impulzus vektorok eredője, azaz a test teljes kiterjedésére vett integrálja:

$$\vec{I} = \int_{(m)} d\vec{I} = \int_{(m)} \vec{v}dm, \quad (6.26)$$

ennek az összefüggésnek a továbbalakításával jutunk a merev test impulzusa és tömegközéppontjának mozgása közötti igen fontos kifejezéshez:

$$\vec{I} = \int_{(m)} \vec{v}dm = \int_{(m)} \dot{\vec{r}}dm = \left(\int_{(m)} \vec{r}dm \right)^\cdot = (m\vec{r}_T)^\cdot = m\dot{\vec{r}}_T = m\vec{v}_T. \quad (6.27)$$

Kihasználtuk a differenciálás és az integrálás felcserélhetőségét (ami abban az esetben igaz, ha a határok nem függenek az integrálási változóktól), valamint felhasználtuk a tömegközéppont 6.10. definícióját. \square

A merev test impulzusvektorának idő szerinti deriváltja:

$$\dot{\vec{I}} = (m\vec{v}_T)^\cdot = m\dot{\vec{v}}_T = m\vec{a}_T. \quad (6.28)$$

6.5. A tömegelem impulzusnyomatéka

A merev test egy tömegelemének impulzusnyomatéka a koordináta-rendszer origójára (6.6a. ábra):

$$d\vec{N}_O = \vec{r} \times d\vec{I}, \quad (6.29)$$

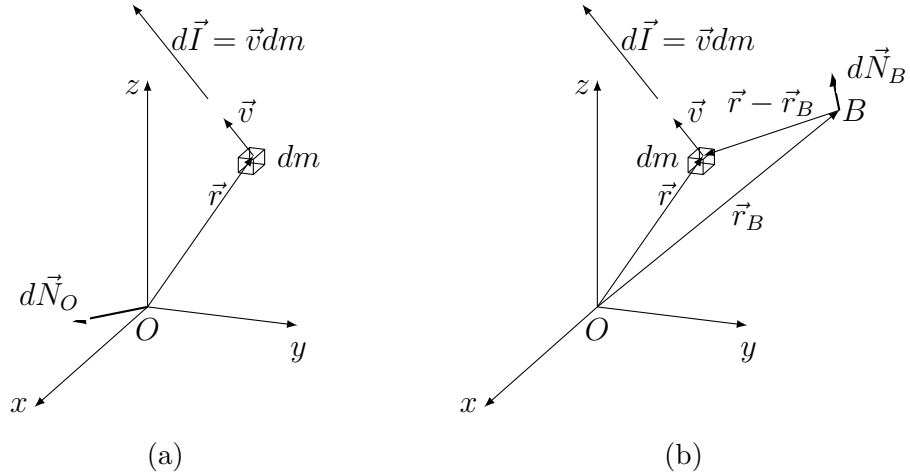
egy tetszőleges B pontra (6.6b. ábra):

$$d\vec{N}_B = (\vec{r} - \vec{r}_B) \times d\vec{I}, \quad (6.30)$$

a test impulzusnyomatéka a megfelelő elemi impulzusnyomatékok összege:

$$\vec{N}_O = \int_{(m)} \vec{r} \times d\vec{I} = \int_{(m)} \vec{r} \times \vec{v} dm, \quad (6.31)$$

$$\vec{N}_B = \int_{(m)} (\vec{r} - \vec{r}_B) \times d\vec{I} = \int_{(m)} (\vec{r} - \vec{r}_B) \times \vec{v} dm. \quad (6.32)$$



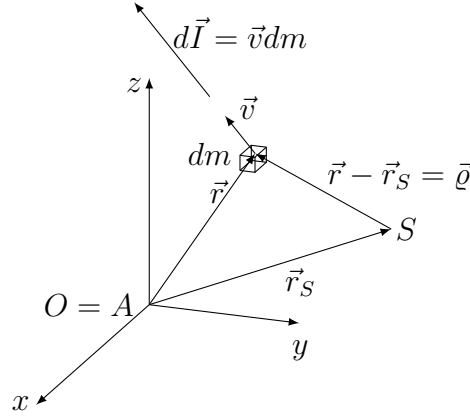
6.6. ábra. Az elemi impulzusnyomaték vektor

6.6. A merev kontinuum impulzusnyomatéka

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért, az általánosság csorbítása nélkül egy tetszőleges A pontra számítjuk ki a folytonos tömegeloszlású merev test impulzusnyomatékát úgy, hogy a koordináta-rendszer kezdőpontját az A pontba helyezzük: $A = O$. A test sebességállapotának A pontba redukált vektorkettőse $[\vec{\omega}, \vec{v}_A]_A$. A test egy tetszőleges pontjának helyvektora \vec{r} , sebessége

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (6.33)$$

Később jelentősége lesz a tömegközéppontnak (súlypont, S), ennek helyvektora \vec{r}_S . Nyilvánvaló, hogy a 6.7. ábra jelöléseivel $\vec{r} = \vec{r}_S + \vec{\varrho}$.



6.7. ábra

Az elemi impulzusnyomaték:

$$d\vec{N}_A = \vec{r} \times d\vec{I} = \vec{r} \times \vec{v} dm = \vec{r} \times (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}) dm. \quad (6.34)$$

A merev test impulzusnyomatéka:

$$\begin{aligned} \vec{N}_A &= \int_V d\vec{N}_A = \int_{(V)} \vec{r} \times (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}) dm \\ &= \int_{(V)} \vec{r} \times \vec{v}_A dm + \int_{(V)} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm \\ &= \int_{(V)} (\vec{r}_S + \vec{\varrho}) \times \vec{v}_A dm + \int_{(V)} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm \\ &= \int_{(V)} \vec{r}_S \times \vec{v}_A dm + \int_{(V)} \vec{\varrho} \times \vec{v}_A dm + \int_{(V)} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm \\ &= \vec{r}_S \times \vec{v}_A \int_{(V)} dm + \int_{(V)} \vec{\varrho} dm \times \vec{v}_A + \int_{(V)} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm \\ &= \vec{r}_S \times m\vec{v}_A + \underbrace{\vec{S}_S}_{\vec{0}} \times \vec{v}_A + \int_{(V)} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm \end{aligned} \quad (6.35)$$

Az eredményül kapott háromtagú összegben az első tag könnyen megadható a súlypont helyvektorának ismeretében, hiszen az A pont \vec{v}_A sebessége nem más, mint a sebességállapot redukált vektorkettősének második tagja, amit

ismertnek tételezünk fel. A második tag egy olyan vektori szorzat, amelynek első tényezője a test súlypontra számított statikai nyomatéka, ami definíció szerint nulla, emiatt a második tag eltűnik (azonosan nulla).

Most fordítsuk figyelmünket az utolsó tagra: $\int_{(V)} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm$. Az integrandust: $\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ vizsgáljuk először úgy, hogy több matematikai átalakítást végzünk el rajta.

A függelékben külön fejezet segít áttekinteni az itt alkalmazott eszközöket. Az olvasó számára javasolt itt megállni, és áttekinetni a függelék megfelelő 7.5. fejezetét.

Az összegzésekben az index mindig 1-től 3-ig fut, ezért például $\sum_{i=1}^3$ helyett \sum_i -t írunk a jobb áttekinthetőség érdekében.

$$\begin{aligned} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \vec{\omega}(\vec{r}\vec{r}) - \vec{r}(\vec{r}\vec{\omega}) \\ &= \vec{\omega}r^2 - \vec{r}\left(\sum_j x_j \omega_j\right) = \sum_i \left(\omega_i r^2 - x_i \left(\sum_j x_j \omega_j\right)\right) \vec{e}_i \\ &= \sum_i \left(\sum_j \omega_j \delta_{ij} r^2 - x_i \left(\sum_j x_j \omega_j\right)\right) \vec{e}_i = \sum_i \left(\sum_j \omega_j (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j)\right) \vec{e}_i. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Végezzük el az integrálást, és az integrálás azonosságait kihasználva vigyük be az integrálást az összegzésbe:

$$\begin{aligned} \int_{(V)} \sum_i \left(\sum_j \omega_j (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j)\right) \vec{e}_i dm &= \\ \sum_i \left(\sum_j \omega_j \underbrace{\int_{(V)} (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dm}_{J_{Aij}}\right) \vec{e}_i &= \underline{\underline{J}}_A \vec{\omega}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

A $\underline{\underline{J}}_A$ mennyiség neve: A pontra vonatkozó tehetetlenségi tenzor, a $[J_{Aij}]$ mátrix az A pontra vonatkozó tehetetlenségi tenzor mátrixa az adott koordináta-rendszerben. A tenzor mátrixelemei két fontos esetben:

$$\begin{aligned} J_{A11} &= \int_{(V)} (r^2 \delta_{11} - x_1 x_1) dm \\ &= \int_{(V)} ((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \delta_{11} - x_1 x_1) dm = \int_{(V)} (x_2^2 + x_3^2) dm, \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} J_{A12} &= \int_{(V)} (r^2 \delta_{12} - x_1 x_2) dm \\ J_{A11} &= \int_{(V)} (0 - x_1 x_2) dm = - \int_{(V)} x_1 x_2 dm. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Az A pontra vonatkozó tehetetlenségi tenzor mátrixa így számítható ki:

$$[J_{Aij}] = \begin{bmatrix} \int_{(V)} (x_2^2 + x_3^2) dm & -\int_{(V)} x_1 x_2 dm & -\int_{(V)} x_1 x_3 dm \\ -\int_{(V)} x_2 x_1 dm & \int_{(V)} (x_1^2 + x_3^2) dm & -\int_{(V)} x_2 x_3 dm \\ -\int_{(V)} x_3 x_1 dm & -\int_{(V)} x_3 x_2 dm & \int_{(V)} (x_1^2 + x_2^2) dm \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

Ha a helyvektor koordinátáinak jelölését x_1, x_2, x_3 helyett visszaállítjuk a korábbi x, y, z -re, akkor ugyanez így írható:

$$[J_{Aij}] = \begin{bmatrix} \int_{(V)} (y^2 + z^2) dm & -\int_{(V)} xy dm & -\int_{(V)} xz dm \\ -\int_{(V)} yx dm & \int_{(V)} (x^2 + z^2) dm & -\int_{(V)} yz dm \\ -\int_{(V)} zx dm & -\int_{(V)} zy dm & \int_{(V)} (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

A merev test impulzusnyomatéka tetszőleges A pontra így adható meg:

$$\vec{N}_A = \vec{r}_S \times m\vec{v}_A + \underline{\underline{J}}_A \vec{\omega}. \quad (6.42)$$

Ha az A pont egybeesik az S súlyponttal, akkor $\vec{r}_S = \vec{0}$:

$$\vec{N}_S = \underline{\underline{J}}_S \vec{\omega}. \quad (6.43)$$

A tetszőleges A pontra vonatkozó impulzusnyomatékot közvetlen kapcsolatba lehet hozni a súlypontra számított impulzusnyomatékkal. Ennek belátásához először térjünk vissza a definícióhoz, majd vegyük figyelembe, hogy $\vec{r} = \vec{r}_S + \vec{\varrho}$:

$$\begin{aligned} \vec{N}_A &= \int_{(V)} \vec{r} \times \vec{v} dm = \int_{(V)} (\vec{r}_S + \vec{\varrho}) \times \vec{v} dm \\ &= \int_{(V)} \vec{r}_S \times \vec{v} dm + \int_{(V)} \vec{\varrho} \times \vec{v} dm \\ &= \vec{r}_S \times \underbrace{\int_{(V)} \vec{v} dm}_{\vec{I}} + \int_{(V)} \vec{\varrho} \times \vec{v} dm \\ \vec{N}_A &= \vec{r}_S \times \vec{I} + \vec{N}_S. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Kiegészítésként megemlítjük, hogy ugyanez az összefüggés belátható a 6.35. összefüggésből kiindulva is, csak ez esetben több munka van vele. Abban az A pont sebessége és a tehetetlenségi tenzornak az A pontra számított mátrixa

szerepel. Kiindulva az ott megkapott összefüggésből, az így alakítható át:

$$\begin{aligned}
\vec{N}_A &= \vec{r}_S \times m\vec{v}_A + \int_{(V)} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm \\
&= \vec{r}_S \times m(\vec{v}_S + (\vec{\omega} \times (-\vec{r}_S))) + \int_{(V)} (\vec{r}_S + \vec{\rho}) \times (\vec{\omega} \times (\vec{r}_S + \vec{\rho})) dm \\
&= \vec{r}_S \times m\vec{v}_S - m\vec{r}_S \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_S) + \\
&\quad + \int_{(V)} \vec{r}_S \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_S) + \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_S) + \vec{r}_S \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) + \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm \\
&= \vec{r}_S \times \underbrace{m\vec{v}_S}_{\vec{I}} - \underbrace{m\vec{r}_S \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_S) + \vec{r}_S \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_S)}_{\text{egymás ellentettjei, ezért}=\vec{0}} \underbrace{\int_{(V)} dm}_m + \\
&\quad + \int_{(V)} \underbrace{(\vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_S) + \vec{r}_S \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}))}_{\text{egymás ellentettjei, ezért}=\vec{0}} dm + \underbrace{\int_{(V)} \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm}_{\vec{N}_S} \\
&= \vec{r}_S \times \vec{I} + \vec{N}_S.
\end{aligned} \tag{6.45}$$

Az A pontra és a súlypontra számított impulzusnyomatékok közötti összefüggés igen fontos, mert ennek köszönhetően a súlypontra vonatkozóan kiszámított perdület és az impulzus segítségével bármilyen más pontra vonatkozóan is könnyen megadható a nyomaték anélkül, hogy arra a pontra ki kellene számolni a tehetetlenségi tenzor mátrixát. A súlyponti koordináta-rendszerben megadott tehetetlenségi mátrixszal tehát mindez megoldható.

A súlypont tehát az impulzusnyomaték számításakor is különleges szerepet játszik. Hamarosan látni fogjuk, hogy ennél még több is igaz.

6.7. A tehetetlenségi tenzor mátrixa

A tenzorok sajátérték feladatáról és az ahhoz kapcsolódó fogalmakról általában a 7.6 fejezet ad áttekintést.

6.7.1. Definíció (Tehetlenségi tenzor főtengetelyrendszere) Azt a koordináta-rendszert, amelyben a tehetlenségi tenzor mátrixa diagonális, a tehetlenségi tenzor főtengetelyrendszerének nevezzük.

A főtengetelyrendszerre gyakran a FTR rövidítéssel hivatkozunk. A tehetlenségi tenzorral kapcsolatban a főtengetelyrendszert főtehetlenségi rendszernek is nevezzük.

6.7.2. Definíció (Főtengely) A főtengelyrendszer koordináta tengelyei a főtengelyek.

6.7.3. Definíció (Főirány) A főtengelyek irányai a főirányok.

A főirányokat a főtengelyek irányába mutató egységvektorokkal is meg lehet adni, melyek éppen a főtengelyrendszer bázisvektorai, és egyben a tehetetlenségi tenzor sajátvektorai.

6.7.4. Definíció (Főtehetetlenségi nyomaték) A főtengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékokat főtehetetlenségi nyomatékoknak nevezzük.

A főtehetetlenségi nyomatékok a tehetetlenségi tenzor sajátértékei.

6.7.5. Definíció (Deviációs nyomaték) Deviációs nyomatéknak nevezzük a tehetetlenségi tenzor mátrixának nemdiagonális elemeit.

6.7.1. Tétel (A főtengelyrendszer kezdőpontja) A főtengelyrendszer kezdőpontja (origója) mindig a tömegközéppont (súlypont).

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hiszen az $\int_{(m)} xy dm$ típusú integrálok csak akkor tűnnek el, ha az x és y koordináták közül legalább az egyik a súlyponttól való távolságot méri. \square

6.7.2. Tétel (A tehetetlenségi tenzor mátrixa szimmetrikus) A tehetetlenségi tenzor mátrixa szimmetrikus.

Bizonyítás. A 6.40. összefüggésből leolvasható, hogy $J_{Aij} = J_{Aji}$, ahol $i, j = 1, 2, 3$ és $i \neq j$. \square

6.7.3. Tétel (A tehetetlenségi főtengelyek és a szimmetria) A merev test főtengelyei illeszkednek a szimmetriaelemekre. A merev test tömegeloszlásának szimmetriatengelyei főtengelyek, szimmetriasíkjai két főtengelyt tartalmaznak.

Bizonyítás. A 6.3.1. tételhez hasonló a bizonyítás. \square

Általában, egy térbeli szimmetriával nem rendelkező merev testnek egy főtengelyrendszere van. A térbeli szimmetriával rendelkező merev testek esetén

több olyan koordináta-rendszer is található, amely főtengelyrendszer, akár végtelen sok is.

A függelékben

6.8. A tehetetlenségi nyomaték

A merev test A pontján áthaladó, \vec{e} , $|\vec{e}| = 1$ irányvektorú egyenesre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka a tehetetlenségi tenzor mátrixának ismeretében az alábbi módon számítható:

$$J_e = \vec{e}[\underline{J}_A]\vec{e}. \quad (6.46)$$

A fenti, általános definíción túl használatosak az alábbi, speciálisabb fajtái a tehetetlenségi nyomatéknak. Olyan koordináta-rendszert képzelünk el, amelynek origója egybeesik egy tetszőlegesen kiválasztott pontjával a testnek, tengelyei $\{x, y, z\}$.

6.8.1. Definíció (Pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték) A merev test A pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka

$$J_A = \int_{(V)} (\vec{r}_A)^2 dm = \int_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) dm \quad (6.47)$$

6.8.2. Definíció (Koordináta tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték) A merev test koordináta tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékai

$$J_{xx} = \int_{(V)} (y^2 + z^2) dm \quad (6.48)$$

$$J_{yy} = \int_{(V)} (x^2 + z^2) dm \quad (6.49)$$

$$J_{zz} = \int_{(V)} (x^2 + y^2) dm \quad (6.50)$$

$$(6.51)$$

6.8.3. Definíció (Koordináta síkra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték) A

merev test koordináta síkokra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékai

$$J_x = \int_{(V)} x^2 dm \quad (6.52)$$

$$J_y = \int_{(V)} y^2 dm \quad (6.53)$$

$$J_z = \int_{(V)} z^2 dm \quad (6.54)$$

$$(6.55)$$

Itt az indexben szereplő betű a koordináta síknormálvektorával megegyező bázisvektor indexe. Tehát J_x az yz síkra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték.

6.8.4. Definíció (Koordináta síkpárra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték)
A merev test koordináta síkpárokra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékai

$$J_{xy} = \int_{(V)} xy dm \quad (6.56)$$

$$J_{xz} = \int_{(V)} xz dm \quad (6.57)$$

$$J_{yz} = \int_{(V)} yz dm \quad (6.58)$$

$$(6.59)$$

Az index betűi ez esetben is a síkok normálvektorait jelölik, de itt két síkról van szó.

Látható, hogy a síkpárra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok kivételével mindegyik esetben a tömeg és a távolság négyzet szorzata jelenti a tehetetlenségi nyomatékot, a síkpár esetén kicsit más a helyzet, de itt is igaz, hogy a tömeget két távolsággal szorozzuk. Ebből adódik a tehetetlenségi nyomaték mértékegysége

$$[J] = \text{kgm}^2. \quad (6.60)$$

Itt a szögletes zárójel kivételesen nem mátrixot, hanem a mértékegységet jelöli.

Az integrálás és az összeadás felcserélhetőségéből adódóan (az integrálás lineáris művelet) a fentebb definiált tehetetlenségi nyomatékok között az

alábbi összefüggések fedezhetők fel.

$$J_A = J_x + J_y + J_z \quad (6.61)$$

$$J_A = J_{xx} + J_x = J_{yy} + J_y = J_{zz} + J_z \quad (6.62)$$

$$J_{xx} = J_y + J_z \quad (6.63)$$

$$J_{yy} = J_x + J_z \quad (6.64)$$

$$J_{zz} = J_x + J_y \quad (6.65)$$

$$stb. \quad (6.66)$$

Érdemes megjegyezni: a fenti tehetetlenségi nyomatékok típusai abban térnek el egymástól, hogy más-más jellegű geometriai objektumra vonatkoztatjuk azokat. Ugyanakkor ugyanannak a testnek azonos típusú tehetetlenségi nyomatékai is eltérhetnek egymástól, ha más-más geometriai alakzatra számítjuk azokat. Például ugyanannak a testnek más-más tengelyekre számított tehetetlenségi nyomatékai általában különböznek.

Figyeljük meg, hogy a tehetetlenségi tenzor diagonális mátrixelemei a koordináta tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok, nemdiagonális elemei pedig a síkpárokra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok ellentettjei (-1-szeresei).

6.9. A tehetetlenségi nyomatékok összeadhatósága

6.9.1. Tétel (A tehetetlenségi nyomatékok összeadhatósága) A merev test adott típusú, adott geometriai alakzatra számított tehetetlenségi nyomatéka egyenlő a résztartományainak ugyanolyan típusú, ugyanarra az alakzatra számított tehetetlenségi nyomatékainak összegével.

Bizonyítás. A bizonyítás nyilvánvaló az integrálás azon tulajdonsága alapján, hogy a résztartományokra számított integrálok összege egyenlő azok egyesítésével kapott tartomány egészére számított integrállal. \square

Fontos szem előtt tartani, hogy a résztartományok mindegyikének ugyanarra az alakzatra (pontra, síkra, egyenesre vagy síkpárra) kell kiszámítani a tehetetlenségi nyomatékát, csak ekkor adhatók össze.

Nem adható össze két tehetetlenségi nyomaték, ha például

1. az egyik pontra, a másik egyenesre vonatkozik,
2. az egyik egyenesre (tengelyre), a másik síkpárra vonatkozik,

3. mindkettő pontra vonatkozik ugyan, de különböző pontokra (J_A , J_B),
4. mindkettő tengelyre vonatkozik ugyan, de különböző tengelyekre,
5. mindkettő síkra vonatkozik ugyan, de különböző síkokra,
6. stb.

6.10. Steiner tétele

Steiner tétele (Huygens-Steiner tétel) általános alakjában egy merev test tehetetlenségi tenzorának két, egymáshoz viszonyítva eltoltt koordináta-rendszerben felírt mátrixaira vonatkozóan fogalmaz meg fontos állítást. Ebből könnyen megmutatható a párhuzamos tengelyek tétele.

6.10.1. Tétel (Steiner tétele a tehetetlenségi tenzorra) Rögzítsünk egy merev test S súlypontjához (tömegközéppontjához) és egy másik, tetszőleges A pontjához egy-egy koordináta-rendszert úgy, hogy megfelelő tengelyeik legyenek párhuzamosak és azonos állásúak. Az S súlypontból (tömegközéppontból) az A pontba mutató relatív helyvektor \vec{r}_{SA} . Ez azt jelenti, hogy az egyik koordináta-rendszer a másiktól éppen az \vec{r}_{SA} vektorral való eltolással kapható.

Mindkét koordináta-rendszerben felírható a tehetetlenségi tenzor mátrixa. A két mátrix közötti kapcsolat

$$[\underline{J}_A] = [\underline{J}_S] + [\underline{J}_{SA}], \quad (6.67)$$

ahol az \vec{r}_{SA} relatív helyvektor koordinátáiból felépülő

$$[\underline{J}_{SA}] = m \begin{bmatrix} y_{SA}^2 + z_{SA}^2 & -x_{SA}y_{SA} & -x_{SA}z_{SA} \\ -y_{SA}x_{SA} & x_{SA}^2 + z_{SA}^2 & -y_{SA}z_{SA} \\ -z_{SA}x_{SA} & -z_{SA}y_{SA} & x_{SA}^2 + y_{SA}^2 \end{bmatrix} \quad (6.68)$$

neve Steiner-tag.

Bizonyítás. Értelmezzük a tétel állítását a tehetetlenségi tenzor mátrixára a 6.6 fejezetben levezetett 6.41. összefüggés alapján. A súlypontra felírt mátrix:

$$[J_{Sij}] = \begin{bmatrix} \int_{(V)} (y^2 + z^2) dm & -\int_{(V)} xy dm & -\int_{(V)} xz dm \\ -\int_{(V)} yx dm & \int_{(V)} (x^2 + z^2) dm & -\int_{(V)} yz dm \\ -\int_{(V)} zx dm & -\int_{(V)} zy dm & \int_{(V)} (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}. \quad (6.69)$$

Az A ponthoz rögzített, az előbbihez képest \vec{r}_{SA} vektorral párhuzamosan eltolt koordináta-rendszerben felírt mátrix:

$$[J_{Aij}] = \begin{bmatrix} \int_{(V)} (y'^2 + z'^2) dm & - \int_{(V)} x' y' dm & - \int_{(V)} x' z' dm \\ - \int_{(V)} y' x' dm & \int_{(V)} (x'^2 + z'^2) dm & - \int_{(V)} y' z' dm \\ - \int_{(V)} z' x' dm & - \int_{(V)} z' y' dm & \int_{(V)} (x'^2 + y'^2) dm \end{bmatrix}. \quad (6.70)$$

A fenti formulákban szereplő $\{x, y, z\}$ és $\{x', y', z'\}$ koordináták az integrálás futópontjának S -hez viszonyított $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, illetve A ponthoz viszonyított $\vec{r}' = x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y + z'\vec{e}_z$ relatív helyvektorainak koordinátái. A két vektor közötti kapcsolat: $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_{SA}$. A tétel bizonyításához elegendő a $[J_{Aij}]$ mátrix két elemét megvizsgálni.

$$\begin{aligned} J_{Axx} &= \int_{(V)} (y'^2 + z'^2) dm = \int_{(V)} ((y - y_{SA})^2 + (z - z_{SA})^2) dm = \\ &= \int_{(V)} (y^2 - 2yy_{SA} + y_{SA}^2 + z^2 - 2zz_{SA} + z_{SA}^2) dm = \\ &= \int_{(V)} (y^2 + z^2) dm - 2y_{SA} \underbrace{\int_{(V)} y dm}_{y_S=0} - 2z_{SA} \underbrace{\int_{(V)} z dm}_{z_S=0} + \int_{(V)} (y_{SA}^2 + z_{SA}^2) dm = \\ &= \int_{(V)} (y^2 + z^2) dm + m(y_{SA}^2 + z_{SA}^2) \end{aligned} \quad (6.71)$$

Az y_S és z_S a súlypont koordinátái a súlyponthoz rögzített koordináta-rendszerben, ezért definíció szerint nullák.

$$\begin{aligned} J_{Axy} &= - \int_{(V)} x' y' dm = - \int_{(V)} (x - x_{SA})(y - y_{SA}) dm \\ &= - \int_{(V)} (xy - xy_{SA} - yx_{SA} + x_{SA}y_{SA}) dm \\ &= - \int_{(V)} xy dm + y_{SA} \underbrace{\int_{(V)} x dm}_{x_S=0} + x_{SA} \underbrace{\int_{(V)} y dm}_{y_S=0} - mx_{SA}y_{SA} \\ &= - \int_{(V)} xy dm - mx_{SA}y_{SA} \end{aligned} \quad (6.72)$$

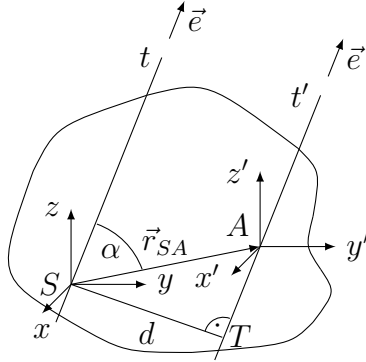
Ezek analógiájára a többi mátrixelemre vonatkozó összefüggés nyilvánvaló.

Összefoglalva a következőt írhatjuk:

$$\begin{aligned}
 [J_{Aij}] &= \\
 &= \begin{bmatrix} \int_{(V)} (y^2 + z^2) dm & -\int_{(V)} xy dm & -\int_{(V)} xz dm \\ -\int_{(V)} yx dm & \int_{(V)} (x^2 + z^2) dm & -\int_{(V)} yz dm \\ -\int_{(V)} zx dm & -\int_{(V)} zy dm & \int_{(V)} (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} + \\
 &+ m \begin{bmatrix} y_{SA}^2 + z_{SA}^2 & -x_{SA}y_{SA} & -x_{SA}z_{SA} \\ -y_{SA}x_{SA} & x_{SA}^2 + z_{SA}^2 & -y_{SA}z_{SA} \\ -z_{SA}x_{SA} & -z_{SA}y_{SA} & x_{SA}^2 + y_{SA}^2 \end{bmatrix} = \\
 &= [J_{Sij}] + [J_{SAij}] \quad (6.73)
 \end{aligned}$$

Ez éppen az állítás, amit bizonyítani kellett. \square

Ennek az eredménynek a felhasználásával igazolható a párhuzamos tengelyek tétele, ami nem más, mint Steiner tétele a tehetetlenségi nyomatékokra vonatkozóan.



6.8. ábra. Steiner tételéhez

6.10.2. Tétel (Steiner tétele a tehetetlenségi nyomatékokra) Ha t egy merev test tömegközéppontján áthaladó tengely, t' egy ezzel párhuzamos tengely, a két tengely távolsága d és a test tömege m , akkor

$$J_{t'} = J_t + md^2. \quad (6.74)$$

Bizonyítás. A tételt a 6.8. ábra szemlélteti. Legyen \vec{e} a t tengely egység hosszúságú irányvektora, a párhuzamosság miatt a t' tengely irányvektora is ugyanez.

$$J_t = \vec{e}[J_{Sij}]\vec{e} \quad (6.75)$$

A tömegközéppontból a t' tengely egy tetszőleges A pontjába mutató vektor legyen \vec{r}_{SA} , ekkor előbb a tehetetlenségi nyomaték definíciója, majd a 6.10.1. tétel alapján:

$$J_{t'} = \vec{e}[J_{Aij}]\vec{e} = \vec{e}([J_{Sij}] + [J_{SAij}])\vec{e} = J_t + \vec{e}[J_{SAij}]\vec{e} \quad (6.76)$$

Azt kell belátni, hogy $\vec{e}[J_{SAij}]\vec{e} = md^2$. Felhasználjuk a vektoriális szorzásra vonatkozó, a függelék 7.5.2 fejezetében kifejtett összefüggéseket. Ne feledjük, hogy $|\vec{e}| = 1$.

$$\begin{aligned} \vec{e}[J_{SAij}]\vec{e} &= -m(\vec{e} \times \vec{r}_{SA})(\vec{r}_{SA} \times \vec{e}) = \\ &= m|\vec{e} \times \vec{r}_{SA}|^2 = m(|\vec{r}_{SA}| \sin \alpha)^2 = md^2 \end{aligned} \quad (6.77)$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Megjegyzés: az SAT derékszögű háromszögből is leolvasható, hogy

$$d = |\vec{r}_{SA}| \cos(90^\circ - \alpha) = |\vec{r}_{SA}| \sin \alpha, \quad (6.78)$$

ami összhangban áll ezzel az eredménnyel. \square

6.11. A merev test mozgásegyenletei

A dinamika alapegyenletéről szóló 2.3. fejezetben megismetük a külső erőhatások, az impulzus derivált és a kinetikai vektor közötti összefüggéseket. Ez azért volt fontos, mert lehetőséget ad az erőhatások és a mozgás közötti összefüggés számszerű leírására. A merev test dinamikájában is használjuk ezt az elképzelést.

A 4.6. és 4.7. fejezetekben megmutattuk, hogy függ össze a pontrendszerre ható külső erőrendszer eredője az impulzus idő szerinti megváltozásával, a külső erőrendszer nyomatéka pedig az impulzusnyomaték megváltozásával. Láttuk, hogy a belső erők eredője és nyomatékaik eredője egyaránt nulla, így kiestek a végformulákból. A pontrendszerek tanulmányozása során gondolatmenetünk általános volt, nem kötöttük ki azt, hogy a pontrendszert alkotó részecskék távolsága állandó legyen.

A newtoni mechanikában a merev test mozgásegyenleteit a tömegpont és a pontrendszer mozgásegyenleteihez hasonlóan a dinamika alaptörvényére vezetjük vissza. Korábban, a 5.1. fejezetben már említettük, hogy a merev

testet elképzelhetjük pontrendszerként vagy kontinuumként is (a definíció változatlan formában érvényes mindkét esetben).

Ha tömegpontként kezeljük a merev testet, akkor azonnal alkalmazhatjuk rá a pontrendszerekre vonatkozó impulzus és perdület tételeket (4.6.1. és 4.7.2. tételek). Ez két vektoregyenlet, amelyek hat skalár ismeretlent tartalmaznak: az impulzus és az impulzusnyomaték koordinátáit.

Elevenítsük fel korábbi eredményeinket, amelyeket pontrendszerre már megmutattunk. Két fontos tételben lehet ezeket összefoglalni, melyek az impulzus tétel és a perdület (impulzusnyomaték) tétel.

$$\vec{F} = \dot{\vec{I}} \quad (6.79)$$

$$\vec{M}_B = \dot{\vec{N}}_B \quad (6.80)$$

Itt \vec{I} a pontrendszer impulzusa, \vec{F} a külső erők eredője, \vec{N} a pontrendszer perdülete a tetszőleges B pontra vonatkozóan, \vec{M}_B a pontrendszerre ható külső erőrendszer nyomatéka a tetszőleges B pontra vonatkozóan. A pont továbbra is az idő szerinti deriválást jelöli.

Ezek az egyenlőségek a dinamika alapegyenletéből következnek. A bizonyítást láttuk, nem túl bonyolult. Ha tehát a merev testet pontrendszerként fogjuk fel, akkor minden további gondolkodás nélkül látjuk, hogy ezek az összefüggések a merev testre is igazak.

El kell gondolkodnunk azon, hogy ha kontinuumként szeretnénk leírni a merev testet, akkor vajon igazak maradnak-e ezek az állítások. Erre két válasz adható. Egyrészt, a merev test "nem tud arról", hogy mi minek kezeljük, a természet törvényei szerint viselkedik, a válasz tehát ez alapján: igen, így is érvényesek ezek az összefüggések. Másrészt, akkor lehetnénk igazán nyugodtak, ha a kontinuumokra is bebizonyítanánk a fenti állításokat. E bizonyításban a tömegpontok helyett differenciálisan kicsi tömegelemek szerepelnének, az egyenletekben az összegzés helyett integrálás lenne, és kiderülne, hogy a tömegelemek közötti kölcsönhatások összege itt is nulla. Ezeknek a kölcsönhatásoknak a leírása azonban kontinuumok esetén koncepcionálisan és formailag is meglehetősen bonyolult, itt nem foglalkozunk vele. Így két lehetőséget kínálunk az olvasónak. Az egyik, hogy megkérjük, fogadja ezt el bizonyítás nélkül. A másik, hogy a 6.79. és 6.80. kontinuumokra való érvényességét axiómaként deklaráljuk, amit a több évszázados tapasztalat igazol, így aztán megint csak arra kérjük az olvasót, hogy ezért fogadja el.

Már csak egy kérdés maradt hátra. Hogy függ össze a külső erők hatása (a 6.79. és 6.80. bal oldala) kontinuumok esetén a kinematikai mennyiségekkel, vagyis a sebességállapotot megadó redukált vektorkettőssel? A merev test mechanikája ezen a ponton lényegesen eltér a pontrendszerek általános

mechanikájától. A pontrendszerekben az egyes tömegpontok egymástól függetlenül mozognak, ezért egy pontrendszer sebességállapotát csak úgy lehet megadni, hogy felsoroljuk mindegyik tömegpont sebességét. Nagy számú tömegpont esetén ez rendkívül sok adatot jelenthet. A merev test esetén a pillanatnyi sebességállapotot (akár pontrendszernek, akár kontínuumnak tekintjük) két darab vektorral (a sebességállapot redukált vektorkettősével), azaz mindössze hat skalár adattal meg lehet adni, akármilyen nagy kiterjedésű is a merev test! Itt használjuk ki a merev test definícióját, miszerint annak bármely két pontja közötti távolság állandó. Ez lényegesen leegyszerűsíti a merev testek dinamikáját, és ez adja a szépségét is.

A merev test sebességállapotának megváltozása és a külső erőhatások közötti összefüggést úgy keressük, hogy a sebességállapot redukált vektorkettősével felírjuk a merev test kinetikai vektorrendszerének redukált vektorkettősét.

6.11.1. Definíció (Kinetikai vektorrendszer) A merev test kinetikai vektorrendszerének nevezzük a testet felépítő dm tömegelemekhez tartozó $d\vec{K} = \vec{a}dm$ vektorok halmazát.

A kinetikai vektorrendszer számossága végtelen, egy $\vec{a}dm$ vektorát elemi kinetikai vektornak nevezzük. A $\vec{K} = \int_{(V)} \vec{a}dm$ mennyiséget a merev test kinetikai vektorának nevezzük.

6.11.2. Definíció (Impulzus vektorrendszer) A merev test impulzus vektorrendszerének nevezzük a testet felépítő dm tömegelemekhez tartozó $d\vec{I} = \vec{v}dm$ vektorok halmazát.

Az impulzus vektorrendszer számossága végtelen, egy $\vec{v}dm$ vektorát elemi impulzus vektornak nevezzük. A $\vec{I} = \int_{(V)} \vec{v}dm$ mennyiséget a merev test impulzus vektorának nevezzük, ezzel már találkoztunk korábban.

Az elemi kinetikai vektor az elemi impulzus vektor idő szerinti deriváltja:

$$\vec{a}dm = \dot{\vec{v}}dm = (\vec{v}dm)' \quad (6.81)$$

Mivel a merev test alakja és tömegeloszlása nem változik, az integrálás és az idő szerinti deriválás felcserélhető, amiből az következik, hogy a kinetikai vektor az impulzus vektor idő szerinti deriváltja:

$$\vec{K} = \int_{(V)} \vec{a}dm = \int_{(V)} \dot{\vec{v}}dm = \left(\int_{(V)} \vec{v}dm \right)' = \dot{\vec{I}}. \quad (6.82)$$

A 6.28. egyenletben már kiszámítottuk a kontínuumként elképzelt merev test (merev kontínuum) impulzusának deriváltját. Mindezeket összegezve

azt mondhatjuk, hogy az impulzustétel merev kontínuumra:

$$\vec{F} = m\vec{a}_T. \quad (6.83)$$

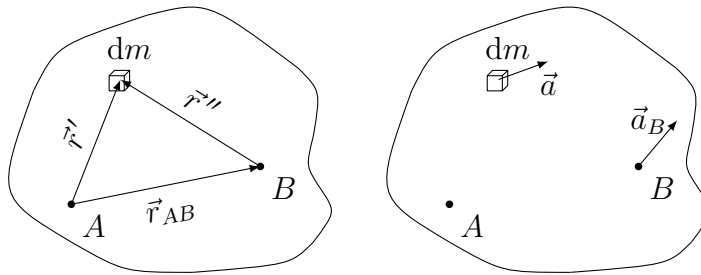
A perdület tétel részletesebb felírásához a kinetikai vektorrendszer nyomatékát kell tanulmányoznunk.

6.11.3. Definíció (Kinetikai nyomaték) A kinetikai vektor nyomatékát kinetikai nyomatéknak nevezzük.

A test kinetikai nyomatékának jele D . Például a merev test egy pontjához tartozó tömegelem egy tetszőleges A pontra számított kinetikai nyomatéka: $d\vec{D}_A = \vec{r}' \times \vec{a} dm$, ahol \vec{r}' az A pontból a tömegelembe mutató relatív helyvektor. A kinetikai nyomaték és az impulzusnyomaték időderiváltja között már nem áll fenn olyan közvetlen összefüggés, mint amit az előbbiekben a kinetikai vektorra láttunk. A kinetikai nyomaték függ a vonatkoztatási pont megválasztásától is.

Válasszunk ki egy tetszőleges A pontot, amelyre a nyomatékot vonatkoztatjuk. Válasszunk ki egy másik, tetszőleges B pontot amelynek gyorsulását ismertnek tételezzük fel. E két pont relatív helyvektora \vec{r}_{AB} , továbbá legyen a test szögsebessége $\vec{\omega}$ és szöggyorsulása $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$, \vec{r}'' a B pontból a tömegelembe mutató relatív helyvektor. Fennál az $\vec{r}' = \vec{r}_{AB} + \vec{r}''$ összefüggés (6.9. ábra). A kinematikában megismert 5.8.2. tétel 5.52. egyenlősége alapján írhatjuk, hogy

$$\vec{r}' \times \vec{a} dm = \vec{r}' \times (\vec{a}_B + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'')) dm. \quad (6.84)$$



6.9. ábra. A merev test kinetikai nyomatékához

A test A pontra vonatkozó kinetikai nyomatékát integrálással kapjuk:

$$\begin{aligned}
\vec{D}_A &= \int_{(V)} \vec{r}' \times (\vec{a}_B + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'')) dm \\
&= \int_{(V)} \vec{r}' \times \vec{a}_B dm + \int_{(V)} \vec{r}' \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}'') dm + \int_{(V)} \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'')) dm \\
&= \vec{S}_A \times \vec{a}_B + \int_{(V)} (\vec{r}_{AB} + \vec{r}'') \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}'') dm + \\
&\quad + \int_{(V)} (\vec{r}_{AB} + \vec{r}'') \times (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'')) dm \\
&= \vec{S}_A \times \vec{a}_B + \vec{r}_{AB} \times (\vec{\varepsilon} \times \int_{(V)} \vec{r}'' dm) + \int_{(V)} \vec{r}'' \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}'') dm + \\
&\quad + \vec{r}_{AB} \times (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \int_{(V)} \vec{r}'' dm)) + \int_{(V)} \vec{r}'' \times (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'')) dm \\
&= \vec{S}_A \times \vec{a}_B + \vec{r}_{AB} \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{S}_B) + \vec{r}_{AB} \times (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{S}_B)) \\
&\quad + \int_{(V)} \vec{r}'' \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}'') dm + \int_{(V)} \vec{r}'' \times (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'')) dm \tag{6.85}
\end{aligned}$$

Az utolsó sorban szereplő két tagról megmutatjuk a következőt. Vegyük figyelembe, hogy $\frac{d\vec{r}''}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}''$, mert ennek a vektornak a hossza állandó, és $\vec{\omega}$ szögsebességgel forog.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\vec{r}'' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'')) = \\
&= \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r}'') \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'')}_{=\vec{0}} + \vec{r}'' \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}'') + \vec{r}'' \times (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'')) \tag{6.86}
\end{aligned}$$

Ezt visszahelyettesítve a fenti egyenlőségbe

$$\begin{aligned}
\vec{D}_A &= \vec{S}_A \times \vec{a}_B + \vec{r}_{AB} \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{S}_B) + \vec{r}_{AB} \times (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{S}_B)) \\
&\quad + \frac{d}{dt} \int_{(V)} (\vec{r}'' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'')) dm \\
&= \vec{S}_A \times \vec{a}_B + \vec{r}_{AB} \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{S}_B) + \vec{r}_{AB} \times (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{S}_B)) + \dot{\vec{N}}_B \tag{6.87}
\end{aligned}$$

Az általánosság csorbítása nélkül választhatjuk a B pontot úgy, hogy az S tömegközépponttal (súlyponttal) egybeessék. Ekkor $\vec{S}_B = \vec{S}_S = \vec{0}$. A kinetikai nyomatékre kapott összefüggés tovább egyszerűsödik:

$$\vec{D}_A = \vec{S}_A \times \vec{a}_B + \dot{\vec{N}}_B. \tag{6.88}$$

A statikai nyomatékról tudjuk, hogy $\vec{S}_A = m\vec{r}_{AS}$. A tömeget átcsoportosítjuk a szorzat második tényezőjébe.

$$\vec{D}_A = \vec{r}_{AS} \times m\vec{a}_S + \dot{\vec{N}}_S = \vec{r}_{AS} \times \dot{\vec{I}} + \dot{\vec{N}}_S. \tag{6.89}$$

Ha pedig az A pont is egybeesik a súlyponttal, akkor $\vec{r}_{AS} = \vec{0}$ és

$$\vec{D}_S = \dot{\vec{N}}_S. \quad (6.90)$$

Elegendő egyetlen pillantást vetnünk a 6.43. és 6.44. egyenletekre, hogy lássuk: a kinetikai vektor, bármely pontra is vonatkoztatjuk, nem más, mint a merev test impulzusnyomaték vektorának idő szerinti deriváltja. Eredményeinket összefoglalva, a merev test mozgásegyenletei súlypontra vonatkoztatott nyomatékok esetén:

$$\vec{F} = m\vec{a}_S \quad (6.91)$$

$$\vec{M}_S = \dot{\vec{N}}_S \quad (6.92)$$

tetszőleges A pontra vonatkoztatott nyomatékok esetén:

$$\vec{F} = m\vec{a}_S \quad (6.93)$$

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AS} \times \dot{\vec{I}} + \dot{\vec{N}}_S. \quad (6.94)$$

6.12. A merev test statikája

A mechanika tudományterületén belül a statika a dinamikának egy ága, amely az egyensúly feltételeit tanulmányozza. Egyensúlyban van egy test, ha minden sebesség és gyorsuláskoordinátája tartósan nulla. A merev test mozgásegyenleteiből könnyen megkaphatók a statika alapegyenletei. A sebességek és gyorsulások helyébe mindenütt nullát kell írunk. Továbbá ki kell kötnünk, hogy a kezdő pillanatban is nullák voltak a sebességek.

$$\vec{F} = \vec{0} \quad (6.95)$$

$$\vec{M}_A = \vec{0} \quad \text{minden pontra} \quad (6.96)$$

$$\vec{v}_S = \vec{0} \quad (6.97)$$

$$\vec{\omega}(t=0) = \vec{0} \quad (6.98)$$

Ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor a merev test a tartós nyugalom állapotában van. A merev test statikájáról itt nem írunk részletesen.

6.13. A merev test mozgási energiája

Miként a tömegpont esetén a mozgási energia kiszámításához a tömegre és a sebességre van szükség ($\frac{1}{2}mv^2$), úgy a merev test mozgási energiáját a sebességállapotából és a tömegeloszlásából származtatjuk. Látni fogjuk azonban, hogy a két mennyiség között lényeges különbségek is vannak.

A merev test sebességállapotát két megközelítésben tanulmányozzuk.

Egyrészt redukáljuk azt egy tetszőleges A pontba, amit most a koordináta-rendszer kezdőpontjának is választunk. Ekkor a redukált vektorkettős: $[\vec{\omega}; \vec{v}_A]_A$, és - ahogy korábban már láttuk - egy tetszőleges pont sebességét ezzel így fejezzük ki: $\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Másrészt ugyanennek a testnek a pillanatnyi sebességállapotát speciálisan a tömegközéppontba (súlypontba) is redukálhatjuk. Ekkor a redukált vektorkettős $[\vec{\omega}; \vec{v}_S]_S$, egy tetszőleges pont sebessége ezzel így fejezhető ki: $\vec{v} = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{r}'$. Itt \vec{r}' a tömegközéppontból a vizsgált pontba mutató relatív helyvektort jelöli.

A merev test egy kicsiny dV térfogatelemében foglalt tömegelem $dm = \rho(\vec{r})dV$. A tömegelem mozgási energiája

$$dT = \frac{1}{2} \vec{v}^2 dm = \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} dm. \quad (6.99)$$

Ebből kiindulva számítjuk ki a merev test egészének mozgási energiáját. Használjuk fel a sebességállapot tömegközéppontba redukált vektorkettősét.

$$\begin{aligned} T &= \int_{(m)} dT = \int_{(m)} \frac{1}{2} \vec{v} \vec{v} dm = \frac{1}{2} \int_{(m)} (\vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{r}') \vec{v} dm = \\ &= \frac{1}{2} \int_{(m)} \vec{v}_S \vec{v} dm + \frac{1}{2} \int_{(m)} (\vec{\omega} \times \vec{r}') d\vec{I} = \\ &= \frac{1}{2} \vec{v}_S \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\int_{(m)} \vec{r}' dm}_{m\vec{r}_S} \right) + \frac{1}{2} \int_{(m)} \vec{\omega} \underbrace{(\vec{r}' \times d\vec{I})}_{d\vec{N}_S} = \\ &= \frac{1}{2} \vec{v}_S m \dot{\vec{r}}_S + \vec{\omega} \frac{1}{2} \int_{(m)} d\vec{N}_S = \\ &= \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{N}_S = \\ &= \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \underline{J}_S \vec{\omega} = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2 \end{aligned} \quad (6.100)$$

A harmadik sorban alkalmaztuk a vegyes szorzatra vonatkozó azonosságot (a függelékben megtalálható).

J_S a tömegközépponton (súlyponton) áthaladó, a szögsebesség vektorral párhuzamos (ezzel együtt a centrális egyenessel is párhuzamos, de azzal nem feltétlenül egybeeső) tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték.

A merev test mozgási energiáját tehát az alábbi kéttagú összeg adja meg:

$$T = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2. \quad (6.101)$$

Az első tag a test haladó mozgásával kapcsolatos ún. transzlációs mozgási energia tag, a második pedig a forgó mozgásból eredő ún. rotációs mozgási energia tag. (Figyeljük meg, hogy a tömegpont mozgási energiájának számításakor rotációs tag soha nem lép fel!)

Ha a merev test olyan tengely körül forog, amely áthalad a súlyponton, akkor a fenti összefüggésben $v_S = 0$, és a mozgási energiát megadó képlet a középiskolából is ismert $T = \frac{1}{2} J_S \omega^2$ alakra egyszerűsödik.

A merev test mozgási energiáját ki lehet számítani akkor is, ha a sebességállapotot nem a súlypontba redukáljuk. Ekkor az előbbihez hasonló gondolatmenettel a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
 T &= \int_{(m)} dT = \int_{(m)} \frac{1}{2} \vec{v} \vec{v} dm = \frac{1}{2} \int_{(m)} (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}) \vec{v} dm = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{(m)} \vec{v}_A \vec{v} dm + \frac{1}{2} \int_{(m)} (\vec{\omega} \times \vec{r}) d\vec{I} = \\
 &= \frac{1}{2} \vec{v}_A \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\int_{(m)} \vec{r} dm \right)}_{m\vec{r}_S} + \frac{1}{2} \int_{(m)} \vec{\omega} \underbrace{(\vec{r} \times d\vec{I})}_{d\vec{N}_A} = \\
 &= \frac{1}{2} \vec{v}_A m \dot{\vec{r}}_S + \vec{\omega} \frac{1}{2} \int_{(m)} d\vec{N}_A = \\
 &= \frac{1}{2} m \vec{v}_A \vec{v}_S + \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{N}_A
 \end{aligned} \tag{6.102}$$

A merev test mozgási energiája tehát így is megadható:

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}_A \vec{v}_S + \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{N}_A. \tag{6.103}$$

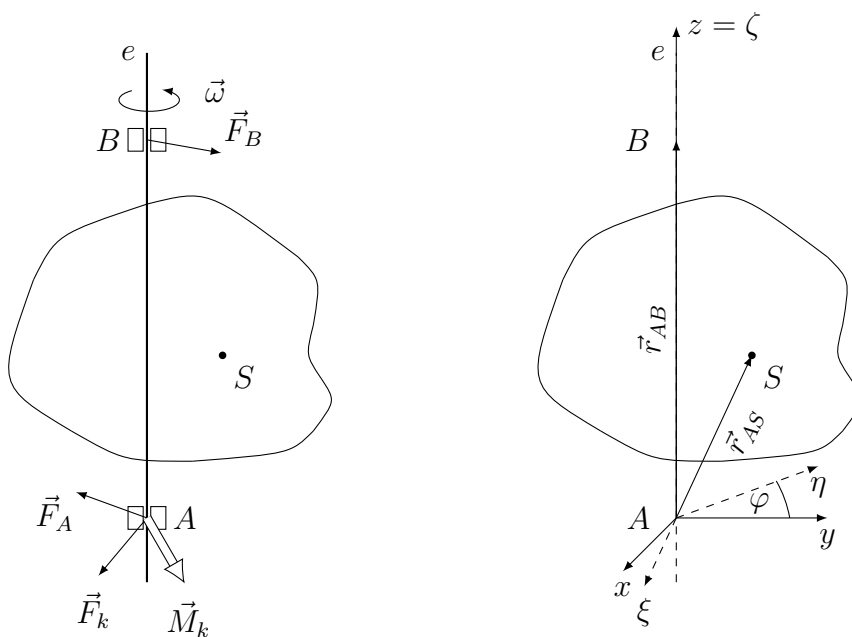
6.14. A rögzített tengely körül forgó merev test

A merev test rögzített tengely körül való forgómozgását vizsgáljuk. A célunk az lesz, hogy meghatározzuk a csapágyakban ébredő erőket, és annak feltételét, hogy azok mikor tűnnek el.

A pillanatnyi sebességállapot elemi forgómozgás, a rögzített tengely megegyezik az e pillanatnyi forgástengellyel. A tengelyt két csapágy rögzíti az A és a B pontokban, ezek \vec{F}_A és \vec{F}_B erőt fejtenek ki a tengelyre. A külső erőrendszer A pontba redukált vektorkettőse $[\vec{F}_k, \vec{M}_k]_A$. A Földhöz viszonyítva nyugvó koordináta-rendszert használunk, melynek tengelyei $\{x, y, z\}$

(6.10. ábra). A test szögsebessége és szöggyorsulása párhuzamos a z tengellyel: $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$, $\vec{\varepsilon} = \varepsilon \vec{e}_z$. A kezdő pillanatban egy pont koordinátái legyenek $\{x, y, z\}$, egy későbbi időpontban $\{\xi, \eta, \zeta\}$. A forgó mozgás során a testnek a z tengely körüli elfordulása változik, ennekjele legyen φ . Egyelőre általános (tehát nem állandó szögsebességű) mozgást vizsgálunk, ezért a φ szög időfüggésével nem foglalkozunk. A koordináták megadhatók a φ szög függvényeiként:

$$\begin{aligned}\xi &= x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ \eta &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi \\ \zeta &= z.\end{aligned}\tag{6.104}$$



6.10. ábra. A rögzített tengely körül forgó merev test

Írjuk fel a merev test mozgásegyenletét az $\{x, y, z\}$ koordináta-rendszerben.

A kezdő pillanatban legyen a test tehetetlenségi tenzorának mátrixa

$$\begin{aligned}
 [J_A] &= \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \int_{(V)} (y^2 + z^2) dm & -\int_{(V)} xy dm & -\int_{(V)} xz dm \\ -\int_{(V)} yx dm & \int_{(V)} (x^2 + z^2) dm & -\int_{(V)} yz dm \\ -\int_{(V)} zx dm & -\int_{(V)} zy dm & \int_{(V)} (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} \quad (6.105)
 \end{aligned}$$

Mivel a test helyzete pillanatról pillanatra változik, a pontjainak koordinátái is változnak, így a tehetetlenségi tenzor mátrixa az általunk választott nyugvó koordináta-rendszerben függ a test elfordulási szögétől.

$$\begin{aligned}
 [J_A] &= \begin{bmatrix} J'_{xx} & J'_{xy} & J'_{xz} \\ J'_{yx} & J'_{yy} & J'_{yz} \\ J'_{zx} & J'_{zy} & J'_{zz} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \int_{(V)} (\eta^2 + \zeta^2) dm & -\int_{(V)} \xi \eta dm & -\int_{(V)} \xi \zeta dm \\ -\int_{(V)} \eta \xi dm & \int_{(V)} (\xi^2 + \zeta^2) dm & -\int_{(V)} \eta \zeta dm \\ -\int_{(V)} \zeta \xi dm & -\int_{(V)} \zeta \eta dm & \int_{(V)} (\xi^2 + \eta^2) dm \end{bmatrix} \quad (6.106)
 \end{aligned}$$

A koordináták szögtől való függését leíró 6.104. kifejezések behelyettesítésével könnyen meg lehet győződni arról, hogy a tehetetlenségi tenzor mátrixa az elfordulás szögétől az alábbiak szerint függ ¹. A tömörebb írásmód érdekében használjuk a $\sin \varphi = s$ és $\cos \varphi = c$ jelöléseket

$$\begin{aligned}
 [J_A] &= \\
 &\begin{bmatrix} J_{xx}s^2 + J_{yy}c^2 + 2J_{xy}sc & (J_{yy} - J_{xx})sc - J_{xy}(s^2 - c^2) & J_{xz}c + J_{yz}s \\ (J_{yy} - J_{xx})sc - J_{xy}(s^2 - c^2) & J_{xx}c^2 + J_{yy}s^2 - 2J_{xy}sc & J_{xz}s + J_{yz}c \\ J_{xz}c + J_{yz}s & J_{xz}s + J_{yz}c & J_{zz} \end{bmatrix} \quad (6.107)
 \end{aligned}$$

¹Ez a tehetetlenségi tenzor mátrixának az elfordulás mátrixával való hasonlósági transzformációja.

A merev test mozgásegyenleteinek felírásához szükség van a tömegközéppont gyorsulására. Felhasználjuk, hogy a koordináta-rendszer origója, az A pont nem mozog. A tömegközéppont koordinátái: ξ_S, η_S, ζ_S .

$$\vec{a}_S = \underbrace{\vec{a}_A}_{\vec{0}} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AS} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AS}) = \begin{bmatrix} -(\omega^2 \xi_S + \varepsilon \eta_S) \\ -(\omega^2 \eta_S - \varepsilon \xi_S) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.108)$$

Az impulzustételt egyelőre írjuk így:

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_k = m \begin{bmatrix} -(\omega^2 \xi_S + \varepsilon \eta_S) \\ -(\omega^2 \eta_S - \varepsilon \xi_S) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.109)$$

Az impulzusnyomaték:

$$\vec{N}_A = \underline{J}_A \vec{\omega} + \vec{r}_S \times m \underbrace{\vec{v}_A}_{\vec{0}} = \begin{bmatrix} \omega J'_{xz} \\ \omega J'_{yz} \\ \omega J'_{zz} \end{bmatrix} \quad (6.110)$$

A perdület tétel jobboldala:

$$\dot{\vec{N}}_A = \underline{J}_A \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \underline{J}_A \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \varepsilon J'_{xz} - \omega^2 J'_{yz} \\ \varepsilon J'_{yz} + \omega^2 J'_{xz} \\ \varepsilon J'_{zz} \end{bmatrix} \quad (6.111)$$

A perdület tétel:

$$\vec{r}_{AB} \times \vec{F}_B + \vec{M}_k = \begin{bmatrix} \varepsilon J'_{xz} - \omega^2 J'_{yz} \\ \varepsilon J'_{yz} + \omega^2 J'_{xz} \\ \varepsilon J'_{zz} \end{bmatrix} \quad (6.112)$$

A továbbiakban a feladatot a következő feltételekkel vizsgáljuk:

$$\vec{\omega} = \text{állandó}, \vec{\varepsilon} = \vec{0} \frac{1}{s^2}, \vec{F}_k = \vec{0} \text{ N}, \vec{M}_k = \vec{0} \text{ Nm}. \quad (6.113)$$

Ez azt jelenti, hogy az állandó szögsebességgel (fordulatszám) forgó test mozgását tanulmányozzuk abban az esetben, ha a csapágyerőkon kívül más külső erő nem hat rá.

Ekkor a mozgásegyenletek a következő skalár egyenletekkel egyenértékűek. Bevezetjük a $d = |\vec{r}_{AB}|$ jelölést.

$$F_{Ax} + F_{Bx} = -m\omega^2 \xi_S \quad (6.114)$$

$$F_{Ay} + F_{By} = -m\omega^2 \eta_S \quad (6.115)$$

$$F_{Az} + F_{Bz} = 0 \quad (6.116)$$

$$-F_{By}d = -\omega^2 J'_{yz} \quad (6.117)$$

$$F_{Bx}d = -\omega^2 J'_{xz} \quad (6.118)$$

$$0 = 0 \quad (6.119)$$

Fejtsük ki a szög től függő mennyiségeket:

$$F_{Ax} + F_{Bx} = -m\omega^2(x_S \cos \varphi + y_S \sin \varphi) \quad (6.120)$$

$$F_{Ay} + F_{By} = -m\omega^2(-x_S \sin \varphi + y_S \cos \varphi) \quad (6.121)$$

$$F_{Az} + F_{Bz} = 0 \quad (6.122)$$

$$-F_{By}d = -\omega^2(-J_{xz} \sin \varphi + J_{yz} \cos \varphi) \quad (6.123)$$

$$F_{Bx}d = -\omega^2(J_{xz} \cos \varphi + J_{yz} \sin \varphi) \quad (6.124)$$

$$0 = 0 \quad (6.125)$$

A csapágyerők:

$$\begin{aligned} F_{Ax} &= -m\omega^2(x_S \cos \varphi + y_S \sin \varphi) + \frac{\omega^2}{d}(J_{xz} \cos \varphi + J_{yz} \sin \varphi) \\ &= \omega^2\left(\frac{J_{xz}}{d} - mx_S\right) \cos \varphi + \omega^2\left(\frac{J_{yz}}{d} - my_S\right) \sin \varphi \end{aligned} \quad (6.126)$$

$$\begin{aligned} F_{Ay} &= -m\omega^2(-x_S \sin \varphi + y_S \cos \varphi) + \frac{\omega^2}{d}(-J_{xz} \sin \varphi + J_{yz} \cos \varphi) \\ &= -\omega^2\left(\frac{J_{xz}}{d} - mx_S\right) \sin \varphi + \omega^2\left(\frac{J_{yz}}{d} - my_S\right) \cos \varphi \end{aligned} \quad (6.127)$$

$$F_{Bx} = -\omega^2\left(\frac{J_{xz}}{d} \cos \varphi + \frac{J_{yz}}{d} \sin \varphi\right) \quad (6.128)$$

$$F_{By} = \omega^2\left(-\frac{J_{xz}}{d} \sin \varphi + \frac{J_{yz}}{d} \cos \varphi\right) \quad (6.129)$$

$$F_{Az} + F_{Bz} = 0 \quad (6.130)$$

A kapott eredményeket megvizsgálva könnyen ki lehet számítani a csapágyerők forgástengelyre merőleges összetevőjének nagyságát.

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \omega^2 \sqrt{\left(\frac{J_{xz}}{d} - mx_S\right)^2 + \left(\frac{J_{yz}}{d} - my_S\right)^2} \quad (6.131)$$

$$F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} = \omega^2 \sqrt{\frac{J_{xz}^2}{d^2} + \frac{J_{yz}^2}{d^2}} \quad (6.132)$$

Leolvasható, hogy a tengelyre merőleges csapágyerők a szögsebesség négyzetétől függenek, továbbá a tömegközéppontnak a forgástengelytől mért távolságával és a deviációs nyomatékokkal együtt növekednek.

Az azonos irányú erőkoordináták összeadásával pedig azt lehet megmutatni, hogy a tengelyre merőleges erők eredője éppen akkora, amekkora erő

szükséges a súlypontba képzelt m tömegű anyagi pont körpályán tartásához.

$$F_{Ax} + F_{Bx} = -m\omega^2 x_S \quad (6.133)$$

$$F_{Ay} + F_{By} = -m\omega^2 y_S \quad (6.134)$$

ezek eredője:

$$\sqrt{(-m\omega^2 x_S)^2 + (-m\omega^2 y_S)^2} = m\omega^2 \sqrt{(x_S^2 + y_S^2)} = m\omega^2 d_S \quad (6.135)$$

Itt d_S a súlypontnak a forgástengelytől mért távolsága. A súlypont a forgástengely körül körmozgást végez.

A forgástengellyel párhuzamos (z irányú) csapágyerő komponensek határozatlanok. Mivel most nincs külső erő, összegük nulla. Ha a test súlyát figyelembe vennénk, akkor összegük a test súlyával lenne egyenlő. Azonban egyenleteinkből ekkor sem derül ki, hogy ebből mennyi jut az egyik bagy a másik csapágyra. Ez a határozatlanság abból fakad, hogy egy erőt két támasszal egyenlítettünk ki (ha nem mozgna a rendszer, akkor statikailag határozatlannak lehetne nevezni). Ha a feladatban úgy választjuk meg a csapágypontokat, hogy csak az egyik legyen képes tengelyirányú (axiális) erőket felvenni, akkor nyilvánvaló, hogy az hordozza a tengelyirányú terheléseket, ezzel eltűnik a határozatlanság is.

Térjünk most vissza a tengelyre merőleges irányú erőhatásokra. Még vegyük tekintetbe, hogy állandó szögsebességű forgómozgás esetén a polárszög időfüggése, ha a kezdő pillanatbeli értékét nullának választjuk ($\varphi_0 = 0$), így adható meg: $\varphi = \omega t$. Ezt behelyettesítve látható, hogy a csapágyerők az időnek szinuszos függvényei. Ennek a szinuszos változásnak a körfrekvenciája éppen megegyezik a forgás szögsebességével.

A rezgésdiagnosztika, valamint az ilyen elven alapuló állapotfelügyelet részben az itt leírt, és ehhez hasonló jelenségek megfigyelésén, mérésén alapul.

Most megválaszolhatjuk a feltett kérdésünket, hogy mi a feltétele annak, hogy eltűnjenek a csapágyerők. Az, hogy

$$x_S = 0 \text{ m} \quad (6.136)$$

$$y_S = 0 \text{ m} \quad (6.137)$$

$$J_{xz} = 0 \text{ kgm}^2 \quad (6.138)$$

$$J_{yz} = 0 \text{ kgm}^2 \quad (6.139)$$

egyszerre teljesüljenek. Az első és második egyenlet az ún. statikus kiegyensúlyozottság feltétele, ami azt fejezi ki, hogy a tömegközéppont a forgástengelyen helyezkedik el. A második kettő az ún. dinamikus kiegyensúlyozottság feltétele, ami azt fejezi ki, hogy a forgástengely tehetetlenségi főtengely. A dinamikus kiegyensúlyozottság magába foglalja a statikus kiegyensúlyozottságot is. Alacsony fordulatszámok esetén gyakran elegendő a statikus

kiegyensúlyozottságot biztosítani.

A dinamikus kiegyensúlyozottság mindig biztosítható legfeljebb két tömegpontnak a rendszerhez való hozzáadásával. A tömegpontokat számozzuk meg 1 és 2 sorszámmal. Teljesülnie kell a következő egyenleteknek:

$$0 = x_S m + x_1 m_1 + x_2 m_2 \quad \text{statikus kiegyensúlyozás feltétele} \quad (6.140)$$

$$0 = y_S m + y_1 m_1 + y_2 m_2 \quad \text{statikus kiegyensúlyozás feltétele} \quad (6.141)$$

$$0 = J_{xz} - m_1 x_1 z_1 - m_2 x_2 z_2 \quad \text{dinamikus kiegyensúlyozás feltétele} \quad (6.142)$$

$$0 = J_{yz} - m_1 y_1 z_1 - m_2 y_2 z_2 \quad \text{dinamikus kiegyensúlyozás feltétele} \quad (6.143)$$

Figyeljük meg, hogy ez a négy egyenlet nyolc meghatározandó mennyiséget tartalmaz: mindkét anyagi pont tömegét és koordinátáit. Az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Ez azt jelenti, hogy egy rögzített tengely körül forgó merev test dinamikus kiegyensúlyozására nagyon sokféle (végtelen sok) megoldás lehetséges. Műszaki és gazdasági szempontok határozzák meg azt, hogy milyen megoldást választunk.

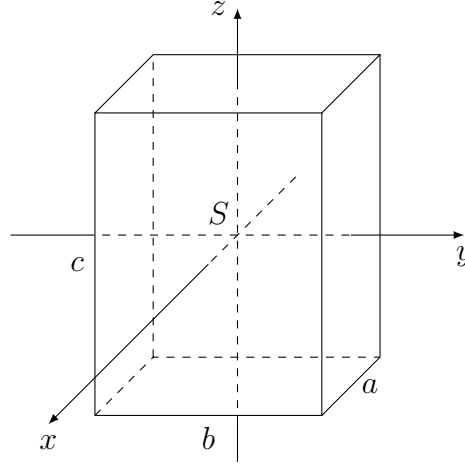
6.15. Számítási példák (a merev test dinamikája)

6.15.1. Feladat. Számítsa ki a homogén tömegeloszlású, ρ sűrűségű, a, b, c élhosszúságú téglatest tehetetlenségi tenzorának mátrixát főtengelyrendszerben!

Megoldás

Meg kell találnunk a főtengelyrendszert. A szimmetria alapján tudjuk, hogy az S súlypont (tömegközéppont) a téglatest átlóinak metszéspontjában van, ismert, hogy ez a főtengelyrendszer origója is. A főtengelyek egybeesnek a téglatest forgási szimmetriatengelyeivel. Így a szimmetria kihasználásával, számítások nélkül is meg tudtuk határozni a főtengelyrendszert, a 6.11. ábra mutatja az eddigi eredményeket.

Ezt követően a tehetetlenségi tenzor mátrixára megismert 6.41. általános összefüggésbe kell behelyettesíteni. Ki kell számítani az integrálokat. Ehhez meg kell adni a határozott integrálás határait. Esetünkben ez egyszerű. A téglatest által elfoglalt térbeli tartományban $x \in [-a/2; a/2], y \in$



6.11. ábra. A homogén tömegeloszlású téglatest főtengelyrendszere

$[-b/2; b/2], z \in [-c/2; c/2]$. Kezdjük a J_{11} mátrixelemmel.

$$\begin{aligned}
 J_{11} &= \int_{(V)} (y^2 + z^2) dm = \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (y^2 + z^2) \rho dx dy dz \\
 &= \rho \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} [(y^2 + z^2)x]_{-a/2}^{a/2} dy dz = \rho \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} (y^2 + z^2) a dy dz \\
 &= \rho a \int_{-c/2}^{c/2} \left[\frac{y^3}{3} + z^2 y \right]_{-b/2}^{b/2} dz = \rho a \int_{-c/2}^{c/2} \left(\frac{b^3}{12} + z^2 b \right) dz \\
 &= \rho a \left[\left(\frac{b^3}{12} z + \frac{z^3}{3} b \right) \right]_{-c/2}^{c/2} = \rho a \left(\frac{b^3 c}{12} + \frac{bc^3}{12} \right) = \frac{\rho abc}{12} (b^2 + c^2) \\
 &= \frac{m}{12} (b^2 + c^2)
 \end{aligned} \tag{6.144}$$

✓

Ennek az analógiájára könnyen belátható, hogy

$$\begin{aligned}
 J_{22} &= \int_{(V)} (x^2 + z^2) dm = \frac{m}{12} (a^2 + c^2) \\
 J_{33} &= \int_{(V)} (x^2 + y^2) dm = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)
 \end{aligned} \tag{6.145}$$

A nemdiagonális elemeknek el kell tűnniük, hiszen főtengelyrendszert válasz-

tottunk, de győződjünk meg erről is.

$$\begin{aligned}
 J_{12} &= - \int_{(V)} xy dm = - \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} xy \rho dx dy dz \\
 &= - \rho \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{-a/2}^{a/2} dy dz \\
 &= - \rho \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[\frac{a^2}{8} y - \frac{a^2}{8} y \right]_{-a/2}^{a/2} dy dz = 0
 \end{aligned} \tag{6.146}$$

Ugyanígy minden nemdiagonális elemről kimutatható, hogy nulla. Ezzel igazoltuk azt, hogy valóban főtengettyrendszer az a koordináta-rendszer, amit választottunk (bár ezt a szimmetria alapján korábban is tudtuk). A homogén tömegeloszlású téglatest tehetetlenségi tenzorának mátrixa főtengettyrendszerben:

$$\begin{aligned}
 [J]_{FTR} &= \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2 + b^2) \end{bmatrix} \\
 &= \frac{m}{12} \begin{bmatrix} (b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & (a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & (a^2 + b^2) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.147}$$

Látható, hogy a téglatest élhosszúságai, valamint sűrűsége vagy tömege szükségesek ahhoz, hogy tehetetlenségi tenzorának mátrixát megadjuk. Ha ezt a mennyiséget ismerjük, akkor pedig bármely tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát ki tudjuk számolni.

Ha a téglatest élhosszúságai egyenlők, $a = b = c$, akkor a test neve homogén tömegeloszlású kocka, melyre eredményünk így alakul:

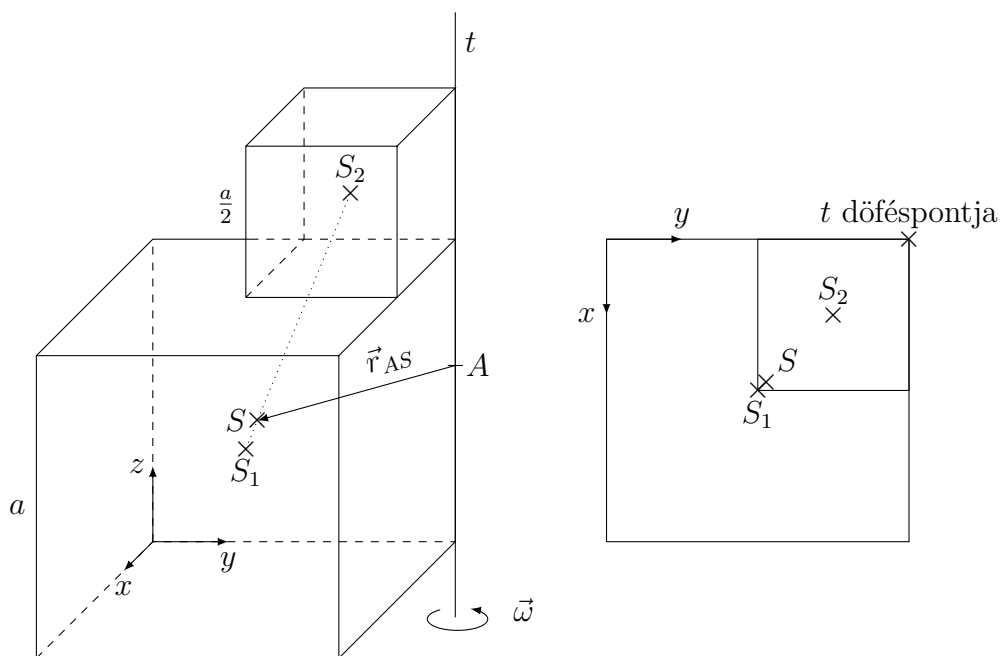
$$\begin{aligned}
 [J]_{FTR} &= \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(a^2 + a^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2 + a^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2 + a^2) \end{bmatrix} \\
 &= \frac{ma^2}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{ma^2}{6} [E]_3
 \end{aligned} \tag{6.148}$$

Ez az érdekes eredmény azt jelenti, hogy a kocka gömbi pörgettyű, vagyis bármely, súlypontján áthaladó tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka egyforma, éppen $\frac{ma^2}{6}$.

A homogén tömegeloszlású téglatest és kocka főtengettyrendszerben felírt tehetetlenségi tenzorát érdemes megjegyezni. A fődiagonálisban levő elemek éppen a főtengettyekre (azaz a téglatest szimmetriatengelyeire) vonatkozó ún. főtehetetlenségi nyomatékok. Eredményeinket a következő feladatban felhasználjuk.

6.15.2. Feladat. Egy $\varrho = 2 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ sűrűségű, homogén tömegeloszlású merev test képzeletben két kockára bontható a 6.12. ábra szerint, a nagyobbik kocka élhosszúsága $a = 20 \text{ cm}$, a kisebbiké $\frac{a}{2}$. A test pillanatnyi forgó mozgást végez, melynek centrális egyenese a t tengely, amely párhuzamos a koordináta-rendszer z tengelyével. A szögsebesség nagysága $3 \frac{1}{\text{s}}$.

- Számítsa ki a merev test t tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!
- Mennyi a test mozgási energiája?
- Számítsa ki a súlypont sebességét és a test impulzusát!



6.12. ábra. A 6.15.2. feladathoz

Megoldás

A kérdések megválaszolása előtt meggondolásokat végzünk a test méreteire és tömegeloszlására vonatkozóan.

A testet gondolatban felbontjuk két kocka alakú tartományra. Mivel homogén tömegeloszlású testről van szó, a szimmetria alapján azonnal látjuk, hogy a nagyobbik kocka S_1 súlypontjának helyvektora $\vec{r}_{S_1} = 0.1\vec{e}_x + 0.1\vec{e}_y + 0.1\vec{e}_z \text{ m}$, a kisebbik kocka S_2 súlypontjának helyvektora pedig $\vec{r}_{S_2} = 0.05\vec{e}_x +$

$0.15\vec{e}_y + 0.25\vec{e}_z$ m. A sűrűség mértékegységét átváltjuk $2 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 2000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. A nagyobbik kocka tömege $m_1 = \varrho \cdot V_1 = 2000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (0.2 \text{ m})^3 = 16 \text{ kg}$, a kisebbiké $m_2 = \varrho \cdot V_2 = 2 \text{ kg}$. Kihasználjuk azt, hogy a kockák a statikai nyomaték szempontjából helyettesíthetők a tömegközéppontjukba helyezett, azokkal egyező tömegű tömegpontokkal. Az eredeti test S tömegközéppontjának helye ezekből az adatokból kiszámítható

$$\begin{aligned}\vec{r}_S &= \frac{m_1 \vec{r}_{S_1} + m_2 \vec{r}_{S_2}}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{16 \cdot (0.1\vec{e}_x + 0.1\vec{e}_y + 0.1\vec{e}_z) + 2 \cdot (0.05\vec{e}_x + 0.15\vec{e}_y + 0.25\vec{e}_z)}{16 + 2} \text{ m} \\ &= 0.0944\vec{e}_x + 0.1055\vec{e}_y + 0.1167\vec{e}_z \text{ m.}\end{aligned}\quad (6.149)$$

Az S_1, S_2, S pontok távolsága a t tengelytől rendre

$$d_1 = \sqrt{2} \cdot 0.1 \text{ m} = 0.14142 \text{ m} \quad (6.150)$$

$$d_2 = \sqrt{2} \cdot 0.05 \text{ m} = 0.0707 \text{ m} \quad (6.151)$$

$$d_3 = \sqrt{2} \cdot 0.0944 \text{ m} = 0.1335 \text{ m} \quad (6.152)$$

a)

A t tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték kiszámításához használni fogjuk a tehetetlenségi nyomatékok összeadhatóságát és Steiner tételét is.

A test t tengelyre vonatkozó J_t tehetetlenségi nyomatékát megkaphatjuk úgy, hogy kiszámítjuk külön a nagy és a kis kocka t tengelyre vonatkozó J_{t1} és J_{t2} tehetetlenségi nyomatékait, majd összeadjuk azokat:

$$J_t = J_{t1} + J_{t2}. \quad (6.153)$$

A nagy kocka J_{t1} tehetetlenségi nyomatékát Steiner tételével számítjuk ki, tehát a súlypontján áthaladó, t tengellyel párhuzamos tengelyre vonatkozó J_{S1} tehetetlenségi nyomatékhoz hozzáadjuk a Steiner-tagot:

$$J_{t1} = J_{S1} + m_1 d_1^2. \quad (6.154)$$

Az előző feladatban megismertük a homogén tömegeloszlású téglatest tehetetlenségi tenzorát főtengelyrendszerben (6.147. formula), és a kockáét is (6.148. formula).

$$J_{S1} = \frac{m_1 a^2}{6} = \frac{16 \cdot (0.2)^2}{6} \text{ kgm}^2 = 0.1067 \text{ kgm}^2. \quad (6.155)$$

Ebből

$$J_{t1} = 0.1067 + \underbrace{(0.1)^2 \cdot 16}_{0.16} \text{ kgm}^2 = 0.2667 \text{ kgm}^2. \quad (6.156)$$

Vegyük észre, hogy a Steiner-tag nagyobb, mint a súlyponti tehetetlenségi nyomaték. Ez nem ritka jelenség. Azt illusztrálja, hogy a tengelynek a súlyponttól való távolodásával igen gyorsan növekszik a testnek a tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka.

Számítsuk ki a kis kockának a t tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát is.

$$J_{S2} = \frac{m_2(a/2)^2}{6} = \frac{2 \cdot (0.1)^2}{6} \text{ kgm}^2 = 0.0033 \text{ kgm}^2 \quad (6.157)$$

$$J_{t2} = J_{S2} + m_2 d_2^2 = 0.0033 + \underbrace{2 \cdot (0.0707)^2}_{0.01} \text{ kgm}^2 = 0.0043 \text{ kgm}^2 \quad (6.158)$$

Az eddigiekből megkaphatjuk a test t tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.

$$J_t = 0.2667 + 0.0043 \text{ kgm}^2 = 0.271 \text{ kgm}^2 \quad (6.159)$$

b)

A mozgási energia kiszámításához szükségünk van a sebességállapot redukált vektorkettőseire. Most célszerű a t tengelyre redukálni, mert a súlypontra vonatkozó tehetetlenségi tenzor mátrixát nem ismerjük, a t tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot viszont kiszámítottuk és ez elegendő is lesz a forgási energia taghoz.

Esetünkben az A pont a t tengely bármely pontja lehet. Válasszuk A pontnak az S súlyponttal megegyező z koordinátájú pontját. Ekkor \vec{r}_{AS} könnyen megadható: $\vec{r}_{AS} = -0.0944\vec{e}_x - 0.0944\vec{e}_y$. Erre a c) feladatrészben szükségünk lesz.

Itt használjuk ki azt, amit a feladat szövege a sebességállapotról mond. A test pillanatnyi forgástengelye a t tengely. Ebből következik, hogy a t tengely minden pontja áll, ez tehát érvényes az A pontra is. A sebességállapotot érdemes az A pontba redukálni. A szögsebesség mindig párhuzamos a centrális egyenessel, így a szögsebesség vektor is könnyen megadható: $\vec{\omega} = 2\vec{e}_z \frac{1}{s}$, hiszen $\vec{\omega} \parallel t \parallel \vec{e}_z$. A sebességállapot redukált vektorkettőse

$$[\vec{\omega}; \vec{v}_A]_A = [2\vec{e}_z \frac{1}{s}; 0 \frac{\text{m}}{s}]_A. \quad (6.160)$$

A test mozgási energiája:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \vec{v}_A \vec{I} + \frac{1}{2} \omega^2 J_t \\ &= 0 + \frac{1}{2} 2^2 \cdot 0.271 J = 0.542 J. \end{aligned} \quad (6.161)$$

c)

A sebességállapot redukált vektorkettőséből a súlypont sebessége azonnal kiszámítható:

$$\vec{v}_S = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AS} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 2 \\ -0.0944 & -0.0944 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1888 \\ -0.1888 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (6.162)$$

A test tömege nyilván $m = m_1 + m_2 = 18 \text{ kg}$.

A test impulzusa

$$\vec{I} = m\vec{v}_S = 3.3984\vec{e}_x - 3.3984\vec{e}_y \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (6.163)$$

✓

7.

Függelék

7.1. Koordináta-rendszerek

Egy koordináta-rendszert a háromdimenziós euklideszi térben a kezdőpontjával és bázisával adunk meg. Ez a fejezet összefoglalja a műszaki gyakorlatban leggyakrabban alkalmazott koordináta-rendszerek főbb tulajdonságait. Az itt leírtak egyaránt szükségesek az elméleti alapismeretek megértéséhez és a feladatok megoldásához.

7.1.1. A síkbeli derékszögű koordináta-rendszer

A síkbeli derékszögű koordináta-rendszert nevezik még síkbeli Descartes-féle koordináta-rendszernek, továbbá ezekben a kifejezésekben a síkbeli helyett állhat a kétdimenziós szó is.

Síkbeli derékszögű koordináta-rendszert akkor alkalmazunk, amikor nem a teljes háromdimenziós térben, hanem annak egy ismert síkján belül kell csupán vektorokat megadni. Ilyen, úgynevezett síkbeli feladatok gyakran előfordulnak a műszaki és természettudományokban.

A síkbeli derékszögű koordináta-rendszer kezdőpontja az O pont (7.1. ábra), bázisa az (\vec{e}_x, \vec{e}_y) vektorkettős. Ez egy ortonormált bázis, ami azt jelenti, hogy tagjai egység hosszúak és egymásra merőlegesek, ezt az alábbi összefüggések fejezik ki:

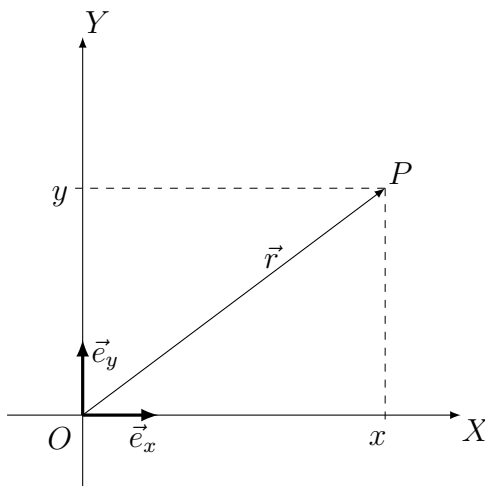
$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0, \quad (7.1)$$

$$|\vec{e}_x| = 1, \quad (7.2)$$

$$|\vec{e}_y| = 1. \quad (7.3)$$

A 7.1. kifejezésben a \cdot (pont) az \vec{e}_x és \vec{e}_y vektorok skaláris szorzását, a 7.2. és 7.3. kifejezésekben az $||$ pedig a vektor abszolút értékét (hosszát, normáját)

jelenti.



7.1. ábra. A síkbeli derékszögű koordináta-rendszer

A sík egy tetszőleges P pontjának helyét egy számpárral adjuk meg, ezeket a pont koordinátáinak nevezzük. A síkbeli derékszögű koordináta-rendszer esetén ez az (x, y) számpár. Az x és y koordináták a P pontból a megfelelő tengelyre bocsátott merőleges és a tengely metszéspontjának előjeles távolsága az origótól. Azt is lehet mondani, hogy ha a tengelyeket olyan számegyenesnek fogjuk fel, amelyeknek nullpontja éppen az O origóval esik egybe, akkor a koordináta nem más, mint az a szám, ahol a P pontból indított merőleges metszi a tengelyt. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a koordináta a tengelyeken a P pont merőleges vetületének helyén álló szám.

A P pont \vec{r} helyvektorát a koordinátákkal és a bázisvektorokkal az alábbi módon fejezzük ki:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y. \quad (7.4)$$

A síkon bármely pont helyvektora megadható a bázisvektorok lineáris kombinációjaként, a lineárkombinációk együtthatói épp a koordináták.

A síkbeli derékszögű koordináta-rendszer bázisvektorainak igen fontos tulajdonsága, hogy nem függenek az időtől (állandók, nem mozognak), amiből következik, hogy idő szerinti deriváltjaik nullák:

$$\dot{\vec{e}}_x = \vec{0}, \quad (7.5)$$

$$\dot{\vec{e}}_y = \vec{0}. \quad (7.6)$$

Ezért a mozgó pont mozgástörvényének időfüggését a koordináták fejezik ki ("hordozzák"):

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y, \quad (7.7)$$

továbbá a mozgástörvény idő szerinti deriváltja a következőképpen számítható:

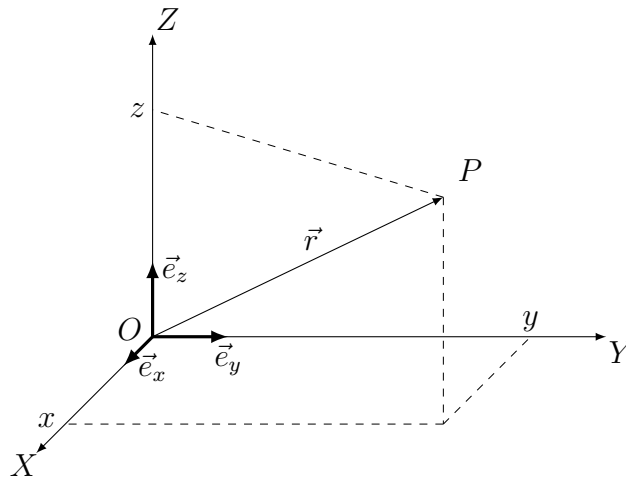
$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y. \quad (7.8)$$

Ez az oka annak, hogy derékszögű koordinátákban deriválni *nagyon könnyű*, így gyakran más koordináta-rendszerekben történő deriválást is erre vezetünk vissza.

A tengelyeket ebben a mellékletben nagybetűvel jelöljük, de előfordul, hogy a koordinátákkal azonos módon a tengelyeket is a megfelelő kisbetűvel jelöljük. Ez nem szokott félreértést okozni. A mennyiségek időfüggését gyakran hangsúlyozzuk a jelölésben azzal, hogy az idő függvényeként írjuk le azokat, vagyis a mennyiség jele után írjuk zárójelben az idő jelét (t). Itt hívjuk fel a figyelmet arra, hogy ez nem mindig történik így. Egy mennyiség akkor is lehet az idő függvénye, ha azt éppen nem írjuk ki. Azt, hogy az egyes mennyiségek változnak-e az idő elteltével vagy sem, vagy a feladat mondja meg, vagy esetenként éppen a feladat megoldásából derül ki.

7.1.2. A térbeli derékszögű koordináta-rendszer

A térbeli (háromdimenziós) derékszögű, vagy Descartes koordináta-rendszer a síkbeli megfelelőjének általánosítása.



7.2. ábra. A térbeli derékszögű koordináta-rendszer

A térbeli derékszögű koordináta-rendszer alkalmas arra, hogy a háromdimenziós térben megadjunk egy tetszőleges vektort. A térbeli derékszögű koordináta-rendszer ortonormált bázisát az $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ vektorhármass alkotja (7.2. ábra). Az ortonormáltság miatt érvényesek az alábbi összefüggések:

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0, \quad (7.9)$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0, \quad (7.10)$$

$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0, \quad (7.11)$$

$$|\vec{e}_x| = 1, \quad (7.12)$$

$$|\vec{e}_y| = 1, \quad (7.13)$$

$$|\vec{e}_z| = 1. \quad (7.14)$$

Egy tetszőleges P pont koordinátái a pontnak a tengelyekre vett (x, y, z) merőleges vetületei. A P pont helyvektorát a bázisvektorok és koordináták segítségével az alábbi módon lehet kifejezni:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z. \quad (7.15)$$

A térbeli derékszögű koordináta-rendszer bázisvektorai állandó vektorok, így időderiváltjaik mind nullák:

$$\dot{\vec{e}}_x = \vec{0}, \quad (7.16)$$

$$\dot{\vec{e}}_y = \vec{0}, \quad (7.17)$$

$$\dot{\vec{e}}_z = \vec{0}. \quad (7.18)$$

A mozgó pont mozgástörvényének időfüggését a síkbeli esethez hasonlóan itt is a koordináták fejezik ki:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z, \quad (7.19)$$

és a mozgástörvény idő szerinti deriváltja a következőképpen számítható:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z. \quad (7.20)$$

Könnyen észrevehető, hogy a térbeli derékszögű koordináta-rendszer a síkbeli megfelelőjéből az \vec{e}_z bázisvektor (a z tengely) hozzáadásával kapható, amely ugyanúgy viselkedik, mint az x és y bázisvektorok. A síkbeli derékszögű koordináta-rendszer a térbelinek részhalmaza. Ez a "rokonság" bizonyos feladatokban jól kihasználható. Más síkbeli és térbeli koordináta-rendszerek között is van hasonló jellegű kapcsolat.

7.1.3. A síkbeli polár koordináta-rendszer

Míg a derékszögű koordináta-rendszerek tárgyalásakor nagyrészt középiskolás ismereteket elevenítettünk fel, így az előző két fejezet a legtöbb olvasó számára könnyen feldolgozható volt, a jelen fejezetben ez feltehetően másként lesz. A következő fejezetben tárgyalandó hengerkoordináta-rendszer szoros kapcsolatban áll a síkbeli polár koordináta-rendszerrel, ahhoz hasonlóan, ahogy a síkbeli és a térbeli derékszögű koordináta-rendszerek rokonságban állnak. A síkbeli polár koordináta-rendszer kezdőpontja a síkon kiválasztott O pont, bázisvektorai az $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ ortonormált vektorpár (7.3. ábra). Az \vec{e}_r vektor mindig a P pont felé mutat, amelynek a helyét meg kívánjuk adni. A síkon ki kell jelölni egy úgynevezett viszonyítási (vagy referencia) irányt, amelynek segítségével az \vec{e}_r helyzete a síkon megadható. Az \vec{e}_φ bázisvektor az \vec{e}_r vektorra jobbsavár szerint merőleges. Az ortonormáltság itt az alábbi összefüggések érvényességét jelenti:

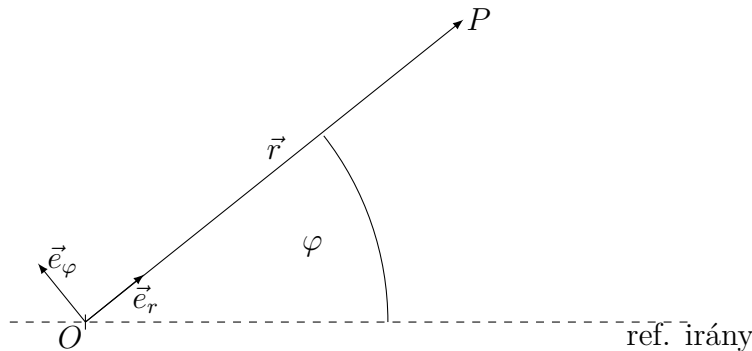
$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = 0, \quad (7.21)$$

$$|\vec{e}_r| = 1, \quad (7.22)$$

$$|\vec{e}_\varphi| = 1. \quad (7.23)$$

A síkbeli polár koordináta-rendszerben egy tetszőleges P pont helyét két adattal lehet megadni. Ezek a koordináták a rádiusz (r) és polárszög (φ). Az r koordináta a P pontnak az O origótól való távolságát adja meg. A 7.3. ábra segítségével látható, hogy $r = |\vec{r}|$. A φ koordináta a referencia irány és az \vec{e}_r vektor által bezárt szöget adja meg. Ez egyben a referencia irány és az \vec{r} helyvektor szöge is.

A polár koordináta-rendszer síkját polársíknak is nevezik.



7.3. ábra. A síkbeli polár koordináta-rendszer

A síkbeli polár koordináta-rendszerben egy pont helyvektora mindig az alábbi alakban adható meg:

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r \quad (7.24)$$

Fontos, hogy a helyvektor kifejezésében soha nem szerepel az \vec{e}_φ bázisvektor. Ez az egyik fontos eltérés, amely a síkbeli polár és a derékszögű koordináta-rendszerek között fennáll. A másik igen lényeges eltérés az, hogy a síkbeli polár koordináta-rendszer bázisvektorai nem állandók:

$$\dot{\vec{e}}_r \neq \vec{0}, \quad (7.25)$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi \neq \vec{0}. \quad (7.26)$$

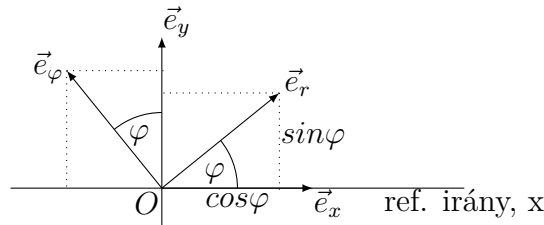
7.1.1. Tétel (Forgó bázisvektorok időderiváltjai) A síkbeli derékszögű polár koordináta-rendszer bázisvektorainak idő szerinti differenciálhányadosai:

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi, \quad (7.27)$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_r. \quad (7.28)$$

Bizonyítás. A bizonyítás során a síkbeli polár koordináta-rendszer bázisvektorait felírjuk derékszögű koordináta-rendszerben, a derékszögű koordinátákban elvégezzük a deriválást, majd az eredményt visszaírjuk polár koordinátákba.

A síkon vegyünk fel egy síkbeli derékszögű és egy síkbeli polár koordináta-rendszert úgy, hogy kezdőpontjaik essenek egybe, és a polár-koordináta-rendszer referencia iránya egyezzen meg a derékszögű koordináta-rendszer x tengelyének irányával (7.4. ábra).



7.4. ábra. A 7.1.1. tétel bizonyításához

A síkbeli polár koordináta-rendszer bázisvektorai megadhatók a derékszögű koordináta-rendszer bázisvektorai segítségével:

$$\vec{e}_r = \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y \quad (7.29)$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y \quad (7.30)$$

Ha a φ polárszög változik $\varphi = \varphi(t)$, akkor a síkbeli polár koordináta-rendszer mozog, ezzel együtt az $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ vektorok is az idő függvényei, de a derékszögű koordináta-rendszer (\vec{e}_x, \vec{e}_y) bázisvektorai ekkor is függetlenek az időtől. Az időfüggés hangsúlyozásával ez így írható:

$$\vec{e}_r(t) = \cos\varphi(t) \vec{e}_x + \sin\varphi(t) \vec{e}_y \quad (7.31)$$

$$\vec{e}_\varphi(t) = -\sin\varphi(t) \vec{e}_x + \cos\varphi(t) \vec{e}_y \quad (7.32)$$

Az idő szerinti deriválás elvégzésével a következő kapható:

$$\dot{\vec{e}}_r(t) = -\dot{\varphi} \sin\varphi \vec{e}_x + \dot{\varphi} \cos\varphi \vec{e}_y = \dot{\varphi} \underbrace{(-\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y)}_{\vec{e}_\varphi} \quad (7.33)$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi(t) = -\dot{\varphi} \cos\varphi \vec{e}_x - \dot{\varphi} \sin\varphi \vec{e}_y = -\dot{\varphi} \underbrace{(\cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y)}_{\vec{e}_r} \quad (7.34)$$

A 7.29. és 7.30., valamint a 7.33. és 7.34. egyenlőségek összevetésével megkapható a tétel állítása. \square

A 7.1.1. tétel segítségével megadható egy mozgó tömegpont $\vec{r}(t)$ mozgástörvényének idő szerinti deriváltja. A mozgástörvény:

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r = r(t) \cdot \vec{e}_r(t), \quad (7.35)$$

$$\varphi = \varphi(t). \quad (7.36)$$

Síkbeli polár koordináták használata esetén a mozgástörvényt *két* egyenlőséggel lehet megadni, mert a helyvektor kifejezésében a polárszög időfüggése nem jelenik meg. Az 7.35. egyenlőség tehát önmagában nem határozza meg a tömegpont mozgástörvényét. A mozgástörvény idő szerinti első deriváltja (a sebesség):

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \dot{\vec{e}}_r = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi. \quad (7.37)$$

7.1.4. A hengerkoordináta-rendszer

A hengerkoordináta-rendszer origója a térben kiválasztott pont, bázisa az $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ ortonormált vektorhármass, érvényesek az alábbi összefüggések:

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = 0, \quad (7.38)$$

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = 0, \quad (7.39)$$

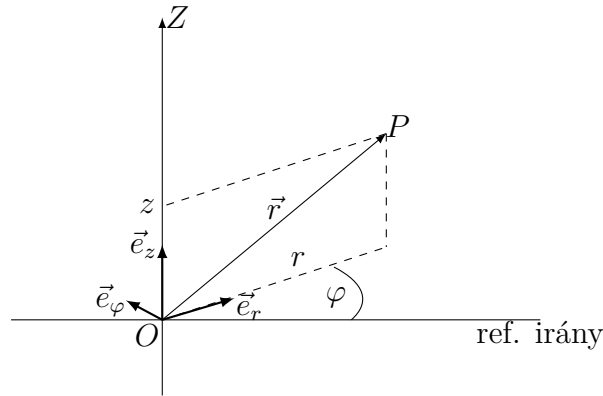
$$\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_z = 0, \quad (7.40)$$

$$|\vec{e}_r| = 1, \quad (7.41)$$

$$|\vec{e}_\varphi| = 1, \quad (7.42)$$

$$|\vec{e}_z| = 1. \quad (7.43)$$

A bázisvektorok elnevezése is sugallja, a 7.5. ábra szemlélteti, hogy a hengerkoordináta-rendszer a síkbeli polár koordináta-rendszer kiterjesztése az origón áthaladó, a síkra merőleges \vec{e}_z bázisvektorral, és az annak megfelelő z tengellyel.



7.5. ábra. A hengerkoordináta-rendszer

A hengerkoordináta-rendszerben a pont helyét három koordinátával lehet megadni. Az r és φ koordináták a pontnak a polársíkra vett merőleges vetületének helyét adja meg a polársíkon (a síkbeli polár koordináta-rendszerénél megismert módon), a z koordináta pedig a pontnak a polársíktól számított előjeles távolságát. Egy pont helyvektora az alábbi módon adható meg:

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r + z \vec{e}_z \quad (7.44)$$

A hengerkoordináta-rendszer bázisvektorai közül kettő, a polár koordináta-rendszer bázisvektorai függenek az időtől, az \vec{e}_z bázisvektor időfüggetlen. Érvényesek az alábbi összefüggések:

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi, \quad (7.45)$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_r, \quad (7.46)$$

$$\dot{\vec{e}}_z = \vec{0}. \quad (7.47)$$

Ennek megfelelően hengerkoordináta-rendszer ben egy, a 7.44. formula szerint megadott vektor időderiváltja:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z. \quad (7.48)$$

A síkbeli polár koordináta-rendszer a hengerkoordináta-rendszernek részhalmaza, illetve a hengerkoordináta-rendszer a síkbeli polár koordináta-rendszernek a térbeli kiterjesztése.

7.1.5. Más koordináta-rendszerek

A műszaki és természettudományokban az eddig leírtakon kívül még számos más koordináta-rendszer is használatos.

Gömbszimmetrikus feladatok esetén a gömbi polár koordináta-rendszer használható.

Tetszőleges görbült felületen a pontok helyét görbevonallú koordináta-rendszerek segítségével lehet megadni, amelyeken a koordináták a térgörbék paraméterei.

7.2. A térgörbék leírásának differenciálgeometriai megközelítése

7.2.1. A térgörbe

A differenciálgeometria a matematika részterülete, *tárgya a háromdimenziós tér sima görbéinek és felületeinek vizsgálata* a differenciál- és integrálszámítás eszközeinek alkalmazásával. A műszaki és természettudományokban gyakran fordulnak elő olyan tételek, problémák, amelyek kapcsolatosak a térbeli görbékkel és felületekkel. Ezért a differenciálgeometria fogalmai és eredményei gyakran előkerülnek ezeken a tudományterületeken. Itt csak a térgörbékkel kapcsolatos legalapvetőbb fogalmak áttekintésére van mód a jegyzet anyagának jobb megértésének elősegítése érdekében. A matematikai tételeket

igyeksünk azonnal szemléletes, fizikai vagy műszaki fogalmakhoz, jelenségekhez kötni.

A valós számok \mathbb{R} halmazának részhalmaza az $I = [a, b]$ zárt intervallum, amelybe minden olyan t szám beletartozik, amelyre $a \leq t \leq b$ igaz. Szemléletesen, a valós számegyenesnek az a és b számok közötti darabja az I intervallum. Ha a számegyenesen időt ábrázolunk ("időtengely"), akkor az I intervallum egy időintervallum, azaz két időpillanat közötti összes pillanat halmaza.

7.2.1. Definíció (Görbeív) A görbeív egy zárt I intervallumnak az \mathbb{R}^3 térre való bijektív és folytonos $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezésének képhalmaza.

A bijektív leképezés, más szóval bijekció kölcsönösen egyértelmű ráképezést jelent. Más szóval bijektív leképezés esetén az egyik halmaz (őshalmaz, értelmezési tartomány) minden elemének a másik halmaz (képhalmaz, értékkészlet) pontosan egy eleme felel meg (tehát nincs olyan, ami kimarad, és egyik irányban sincs olyan, ami kettőhöz tartozik). Görbeív időparaméteres alakja esetén ez azt jelenti, hogy minden időpillanathoz (értelmezési tartomány) tartozik a görbének egy pontja, nem ugrunk át egy pillanatot sem, illetve a görbe egy pontja csakis egy időpillanathoz tartozik. Térgörbék esetén, melyek több görbeívből állhatnak, előfordulhat, hogy önmagát metsző alakzatot kapunk.

A kinematikában előforduló mozgástörvény és pálya fogalmai könnyen kapcsolatba hozhatók ezzel a definícióval. A mozgástörvény egy I időintervallumot képez le a háromdimenziós térbe, azaz minden $t \in I$ időpillanathoz hozzárendel egy $\vec{r}(t)$ helyvektort, s ezeknek a helyvektoroknak a halmaza (ponthalmaz a térben) a pálya. Azt mondjuk, hogy a t a görbeív paramétere, a görbeív pedig paraméteres előállítású.

Az $\vec{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$ leképezéstől megköveteljük, hogy komponensenként legalább egyszer differenciálható legyen t szerint, és az első derivált semmilyen $t \in I$ értékre nem lehet nulla. Ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor a görbeívet differenciálhatónak (folytonosan differenciálhatónak) nevezzük.

Egy görbeívnek végtelen sok paraméteres előállítása létezik. Az egyik előállításról a másikra a paramétertranszformációval lehet áttérni, melynek során nem változnak a képhalmaz, és a leképezés differenciálhatósági tulajdonságai.

7.2.2. Definíció (Térgörbe) Görbének (térgörbének) nevezzük egy $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés képhalmazát akkor, ha bármely pontjához létezik egy relativizált környezet, amelyet görbeívként lehet előállítani.

Görbeívekből épülnek fel a görbék. A görbék abban különböznek a görbeívektől, hogy az I intervallum nem szükségszerűen zárt, és a leképezés nem szükségszerűen bijektív, azaz a görbe önmagát metszheti az ún. többszörös pontokban. A többszörös pontok nélküli görbét *egyszerűnek* nevezzük.

7.2.2. Az ívhosszparaméter és a természetes paraméterezés

Az $s(t)$ ívhosszúság az $I = [t_0, t]$ intervallumon:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{\vec{r}}^2(\tau)} d\tau. \quad (7.49)$$

Az ívhosszúságot természetes paraméternek nevezzük.

7.2.3. Definíció (Ívhossz) Legyen egy tömegpont mozgástörvénye derékszögű koordinátákban $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$, a pálya t_0 időpillanathoz tartozó pontja P_0 , egy későbbi t_1 időpillanathoz tartozó pontja pedig P_1 . A pálya P_0 és P_1 pontok közötti szakaszának s ívhossza

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{\vec{r}}^2(t)} d\tau. \quad (7.50)$$

Ha a P_0 pontból kiindulva tetszőleges t időpillanathoz tartozó P pontig adjuk meg az ívhosszt, akkor az ívhossz a t idő függvényeként áll elő:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{\vec{r}}^2(\tau)} d\tau. \quad (7.51)$$

A τ a t_0 és t közötti időpillanatokon végigfutó változó, azért jelöljük így, hogy ne legyen összetéveszthető az integrálás felső határáként szereplő t időpillanattal.

Az $s(t)$ függvény bármely t időpillanathoz megadja a pálya P_0 ponttól számított hosszát. Ha a tömegpont a pályán egy irányba halad, akkor ez megegyezik a megtett úttal. Az $s(t)$ függvény mindig pozitív és monoton növekvő, mert az 7.51. előállításában szereplő integrál integrandusa nemnegatív (pozitív vagy nulla). Mivel az integrandus folytonos is, ezért $s(t)$ differenciálható.

Az említett két tulajdonság miatt létezik $s(t)$ inverze, a $t(s)$ függvény. A $t(s)$ függvény megadja, hogy a P_0 ponttól indulva mennyi t idő elteltével tesz meg éppen s ívhosszat a mozgó tömegpont. Amennyiben a $t(s)$ függvény ismert, az eredeti $\vec{r}(t)$ időparaméteres mozgástörvényből kiküszöbölhető az idő, és megadható az ívhosszparaméteres alak: $\vec{r}(t) = \vec{r}(t(s)) = \vec{r}(s)$.

Az ívhossz szerinti deriváltakat vesszővel fogjuk jelölni. Ezek a deriváltak a térgörbe igen fontos jellemzőit adják, és ezek miatt használjuk mi is az ívhosszparaméteres alakot.

7.2.1. Tétel (A mozgástörvény ívhosszparaméter szerinti első deriváltja) A mozgástörvény ívhosszparaméter szerinti első deriváltja a \vec{t} érintő irányú egységvektor:

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}'. \quad (7.52)$$

Bizonyítás. Vizsgáljuk a mozgást a t és a $t + \Delta t$ időpillanatokban (7.6a. ábra). A tömegpont ezekben a pillanatokban az $\vec{r}(t)$, illetve $\vec{r}(t + \Delta t)$ helyeken tartózkodik. Az elmozdulás a Δt idő alatt:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t). \quad (7.53)$$

A $\Delta\vec{r}$ elmozdulásvektor a pályagörbe egy szelője, a szelő irányába mutató egységvektor: $\frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|}$. Amint a Δt nullához tart, a $\Delta\vec{r}$ szelő az $\vec{r}(t)$ pontbeli érintőhöz tart, ennek irányvektora

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|} = \vec{t}. \quad (7.54)$$

A $\Delta\vec{r}$ hossza határértékben a hozzá tartozó pályáiv hosszához tart

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta\vec{r}| = |d\vec{r}| = ds. \quad (7.55)$$

Összefoglalva

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\vec{r} = d\vec{r} = \vec{t} ds, \quad (7.56)$$

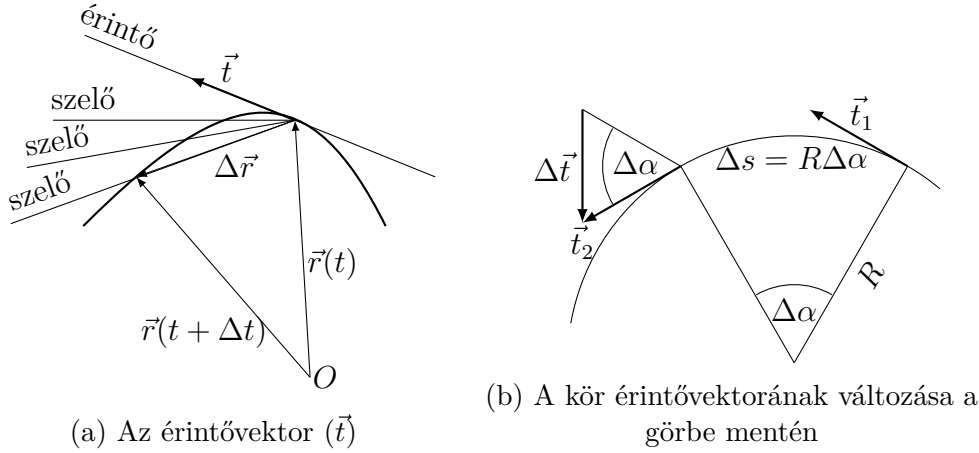
ebből

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t}. \quad (7.57)$$

Az érintő irányú \vec{t} vektor hossza:

$$|\vec{t}| = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = \frac{|d\vec{r}|}{ds} = \frac{ds}{ds} = 1. \quad (7.58)$$

□



7.6. ábra. A pálya érintője

A függelék 7.3.1. tételével összhangban, mint minden állandó hosszúságú vektorra, az érintő irányú egységvektorra is igaz, hogy a megváltozása merőleges a vektorra. Valóban, az állandó hosszúság miatt $\vec{t}^2 = \vec{t} \cdot \vec{t} = \text{állandó}$, mindkét oldal deriválásával kapjuk:

$$2\vec{t} \cdot \vec{t}' = 2\vec{t} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = 0, \quad (7.59)$$

vagyis $\vec{t} \perp \frac{d\vec{t}}{ds}$.

Vizsgáljuk meg a körpálya érintővektorának változását a pálya mentén. A kör kerületének egyes pontjaihoz tartozó érintő irányú egységvektorok nagysága tehát egyenlő, de irányuk eltér. Az irányok eltérését jellemezzük a $\Delta\alpha$ szöggel (7.6b. ábra). Véges nagyságú megváltozás esetén a megtett ívhossz az ívmérték (radiánban mért szög) definíciója alapján: $\Delta s = R\Delta\alpha$, ahol R a kör sugara. Az érintővektor egységnyi ívhosszra eső elfordulásának $\Delta\alpha$ szöge:

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\Delta\alpha}{R\Delta\alpha} = \frac{1}{R}. \quad (7.60)$$

Bármekkorának választjuk az ívet, kör esetén ez a hányados állandó, éppen a kör sugarának reciprokával egyezik meg. A kör ebben a tekintetben is különleges alakzat. Vegyük észre, hogy amint az ív nullához tart, és ezzel együtt az irányváltozás szöge is nullához tart, az érintővektor $\Delta\vec{t}$ megváltozásának $|\Delta\vec{t}|$ hossza tart az egység sugarú kör $\Delta\alpha$ nyílásszöghöz tartozó ívének hosszához:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} |\Delta\vec{t}| = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} |\Delta\vec{t}| = |d\vec{t}| = 1 \cdot d\alpha = d\alpha = \frac{ds}{R}. \quad (7.61)$$

Átrendezéssel a kör esetére a következő fontos összefüggést nyerjük:

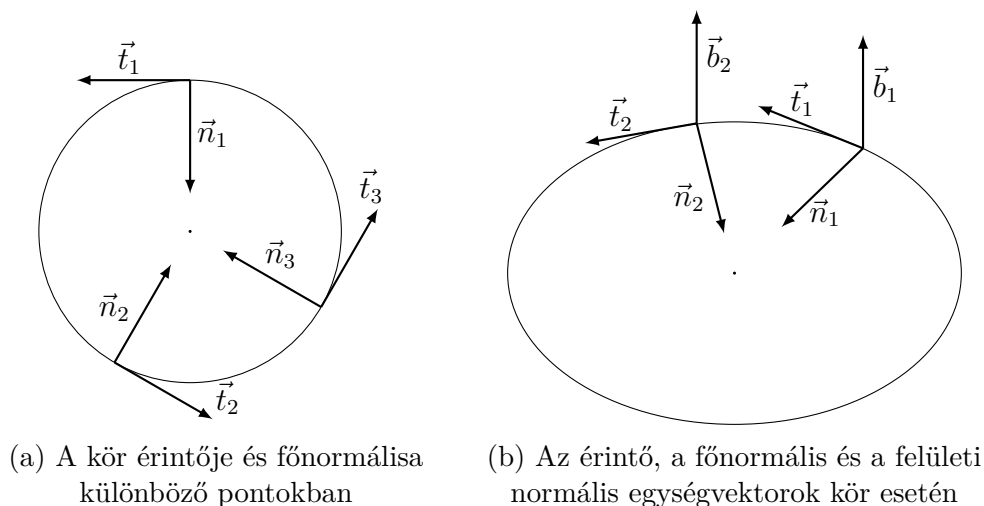
$$\frac{|\mathrm{d}\vec{t}|}{\mathrm{d}s} = \left| \frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} \right| = \frac{1}{R}. \quad (7.62)$$

Kör esetén az érintővektor ívhosszparaméter szerinti deriváltjának hossza a körvonal bármely pontjában éppen a kör sugarának reciprokával egyezik meg. A kör sugarának reciprokát görbületnek is nevezzük, így azt mondhatjuk, hogy a kör állandó görbületű alakzat.

A 7.59. és 7.62. összefüggések egybevetésével megállapíthatjuk, hogy a kör érintőjének ívhosszparaméter szerinti deriváltja egy olyan vektor, amelynek hossza a görbület ($1/R$), iránya pedig merőleges az érintőre úgy, hogy ha az érintési pontba rajzoljuk, akkor a kör középpontja felé mutat. Mindezek alapján a kör esetén fennáll a

$$\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{R}\vec{n} \quad (7.63)$$

egyenlőség. Az \vec{n} neve főnormális egységvektor, amely a kör síkjában jobbszavas szerint merőleges az érintő irányú egységvektorra (7.7a. ábra).



7.7. ábra. A körpálya pontjait jellemző egységvektorok

Tekintettel arra, hogy a körmozgás egy síkban zajlik, eddig nem merült fel a szögelfordulás térbeli elhelyezkedésének kérdése. Ha azt is meg kívánjuk adni, hogy a szögelfordulás milyen síkban zajlik, akkor (a kör adott pontján túl, amelyben vizsgáljuk az érintő megváltozását, tehát ismerjük), meg kell

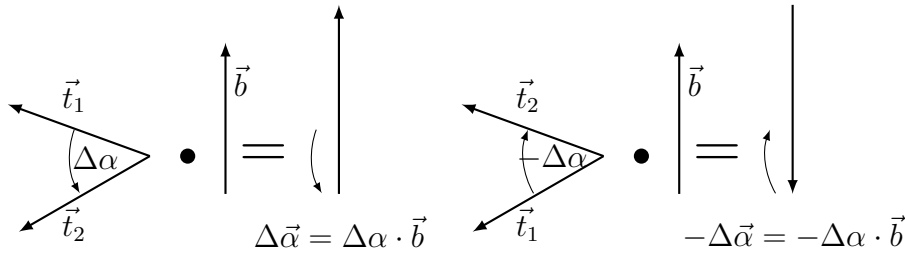
adni a síkot is. Egy sík térbeli irányítottságát a normálvektorával adhatjuk meg. Legyen a körmozgás síkjának normális egységvektora a \vec{b} vektor, amely a körmozgás körüljárási irányához jobbszavar szerint illeszkedik (ha a körmozgásnak megfelelően csavarunk egy jobbménetes csavart, akkor az a \vec{b} vektor irányába halad)(7.7b. ábra). Bevezetjük az elfordulásvektort:

$$\Delta\vec{\alpha} = \Delta\alpha \cdot \vec{b}, \quad (7.64)$$

és az ennek megfelelő *elemi* elfordulásvektort:

$$d\vec{\alpha} = d\alpha \cdot \vec{b}. \quad (7.65)$$

Az elfordulásvektor nagysága megadja az érintő irányú egységvektor irányváltozásának szögét, iránya pedig megadja az elfordulás síkját, és az elfordulás irányát a síkon belül.



7.8. ábra. Az érintő elfordulásvektorának ($\Delta\vec{\alpha}$), és az 7.64. formulának a szemléltetése

Ezzel az érintő irányú egységvektor elemi megváltozása a következőképpen adható meg:

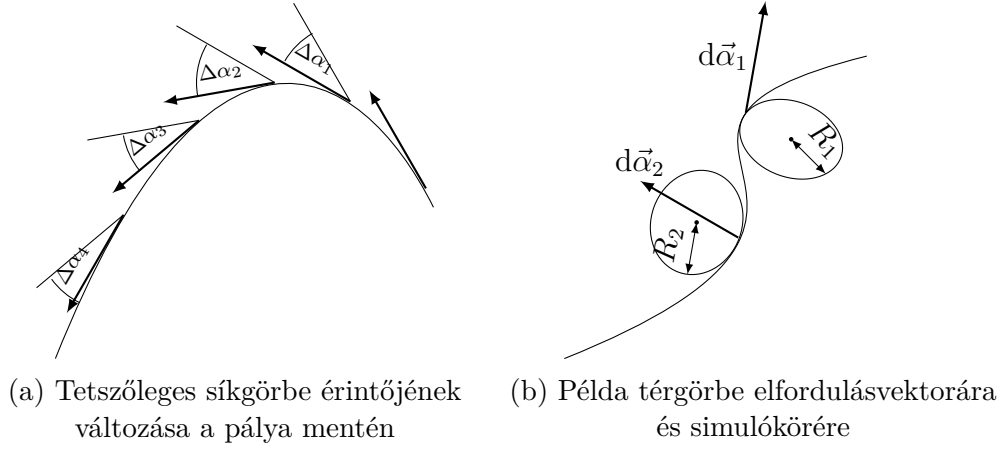
$$d\vec{t} = d\vec{\alpha} \times \vec{t} = d\alpha \cdot \vec{b} \times \vec{t}, \quad (7.66)$$

vegyük észre, hogy $\vec{b} \times \vec{t} = \vec{n}$, így ebből az összefüggésből megkapjuk közvetlenül vektori alakban ugyanazt, amit már korábban is, kicsit körülményesebb okoskodással, láttunk:

$$\frac{d\vec{t}}{d\alpha} = \vec{b} \times \vec{t} \quad / \cdot \frac{1}{R} \quad (7.67)$$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{R} \vec{b} \times \vec{t} = \frac{1}{R} \vec{n}. \quad (7.68)$$

A kör esetére azért fordítottunk kiemelt figyelmet, mert az így nyert eredményeket messzemenően hasznosíthatjuk a térgörbék vizsgálata során. Egy



7.9. ábra. A pálya érintője

tetszőleges térgörbe mentén haladva az érintő irányú egységvektor szintén változik, de egységnyi ívhosszra eső irányváltozásának szöge nem állandó (7.9a. ábra). Általános térgörbe esetén az érintő irányú egységvektor egységnyi ívhosszra eső irányváltozásának szöge ($\Delta\alpha$) nem állandó, így annak határértéke, a görbület sem az, hanem az ívhossz függvénye:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{ds}(s) = \frac{1}{R(s)}. \quad (7.69)$$

Fejtsük sorba az ívhosszparaméter szerint a görbületi sugarat ($R(s)$) a görbe s_0 ívhosszparaméterrel jellemzett helye körül:

$$R(s) = R(s_0) + \frac{dR}{ds}(s - s_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2R}{ds^2}(s - s_0)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3R}{ds^3}(s - s_0)^3 + \dots \quad (7.70)$$

Ha az s_0 helynek igeny kicsiny környezetét vizsgáljuk, akkor a görbületi sugár az $R(s_0)$ értékkel közelíthető e kicsi tartomány pontjaiban. Minél kisebb a tartomány, annál jobb ez a közelítés. Azt mondhatjuk, hogy határátmenetben egy tetszőleges térgörbe bármely s_0 paraméterű pontjának elegendően kicsi környezete $R(s_0)$ sugarú körívvel helyettesíthető. Más szavakkal, az s_0 paraméterű ponthoz érintőkör (simulókör) írható, melynek sugara $R(s_0)$. Egy térgörbe tetszőleges, s_0 ívhosszparaméterrel jelzett pontjához simulókör írható, amelynek

- sugara $R(s_0)$,
- az érintő irányú egységvektor (\vec{t}) és a főnormális egységvektor (\vec{n}) által kifeszített síkban fekszik,

- ennek a síknak a körüljárási irányával jobbsodrású rendszert alkotó normálirányú egységvektora $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$ a binormális egységvektor.

7.3. Matematikai összefüggések vegyesen

Ebben a függelékben azok a matematikai összefüggések találhatók, amelyekre a jegyzet valahol hivatkozik. Itt a tételek megértéséhez szükséges megjegyzések, illusztrációk, egyes esetekben bizonyítások találhatók.

7.3.1. Tétel (Állandó hosszúságú vektor időderiváltja) Az állandó hosszúságú (normájú), de időtől függő $\vec{a}(t)$ vektor idő szerinti $\dot{\vec{a}}(t)$ deriváltja mindig merőleges a vektorra.

Bizonyítás. A tétel szerint a vektor hossza nem változik, de iránya változhat, ez az, ami függ az időtől. Ha a vektor normája állandó $|\vec{a}| = konstans$, akkor $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = konstans$ is igaz. Deriváljuk az idő szerint ezt az összefüggést:

$$\frac{d}{dt} |\vec{a}|^2 = \frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{a}) = 0, \quad (7.71)$$

$$2\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}} = 0, \quad (7.72)$$

$$\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}} = 0. \quad (7.73)$$

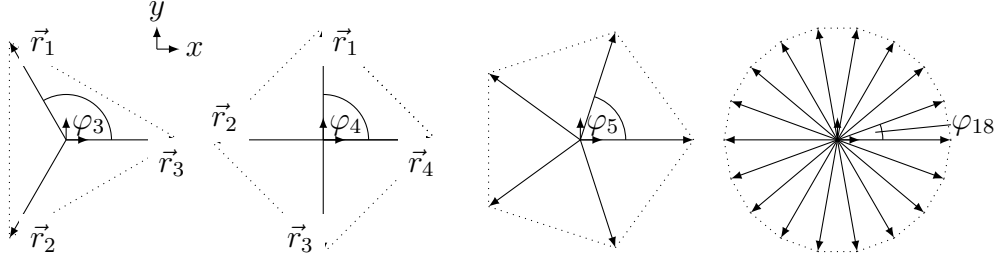
Ha két vektor skaláris szorzata nulla, az azt jelenti, hogy merőlegesek egymásra. \square

Ez az igen egyszerű vektorszámítási összefüggés sok helyen előkerül a matematikában és a mechanikában.

7.3.2. Tétel (Szabályos n-szög csúcspontjai) Egy szabályos síkbeli sokszög (n-szög) csúcspontjainak megfelelő derékszögű kordinátáit összeadva nullát kapunk, ha a koordináta-rendszer kezdőpontja a sokszög köré írt kör középpontja.

Bizonyítás. A szabályos n-szög csúcspontjainak koordinátái kifejezhetők az origóból a csúcspontokhoz húzott szakaszoknak az x tengellyel bezárt szögeivel (7.10. ábra). Ezek a szögek számtani sorozatot alkotnak:

$$1 \cdot \frac{2\pi}{n}, 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, 3 \cdot \frac{2\pi}{n}, \dots, n \cdot \frac{2\pi}{n} = 2\pi. \quad (7.74)$$

7.10. ábra. Néhány szabályos sokszög példája a 7.3.2. tételhez $n=3,4,5,18$

Vezessük be a következő jelölést: $\varphi_n = \frac{2\pi}{n}$. A csúcspontok koordinátái adott n esetén:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= (\cos(\varphi_n), \sin(\varphi_n)), \\ \vec{r}_2 &= (\cos(2\varphi_n), \sin(2\varphi_n)), \\ \vec{r}_3 &= (\cos(3\varphi_n), \sin(3\varphi_n)), \\ &\vdots \\ \vec{r}_n &= (\cos(n\varphi_n), \sin(n\varphi_n)).\end{aligned}\tag{7.75}$$

Az eddig bevezetett jelölésekkel a bizonyítandó állítás:

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \stackrel{?}{=} \vec{0},\tag{7.76}$$

részletesebben

$$\sum_{i=1}^n (\cos(i\varphi_n), \sin(i\varphi_n)) = \left(\sum_{i=1}^n \cos(i\varphi_n), \sum_{i=1}^n \sin(i\varphi_n) \right) \stackrel{?}{=} (0, 0).\tag{7.77}$$

A tétel tehát olyan szögek szinuszainak, illetve koszinuszainak összegéről szól, amelyek számtani sorozatot alkotnak. Általában igaz a következő két trigonometriai azonosság:

$$\begin{aligned}\sin(\beta) + \sin(\beta + \alpha) + \sin(\beta + 2\alpha) + \sin(\beta + 3\alpha) + \dots + \sin(\beta + n\alpha) = \\ \sum_{i=0}^n \sin(\beta + i\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\beta + \frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\end{aligned}\tag{7.78}$$

$$\begin{aligned}\cos(\beta) + \cos(\beta + \alpha) + \cos(\beta + 2\alpha) + \cos(\beta + 3\alpha) + \dots + \cos(\beta + n\alpha) = \\ \sum_{i=0}^n \cos(\beta + i\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\beta + \frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\end{aligned}\tag{7.79}$$

A tételben $\beta = 0$, $\alpha = \varphi_n$, és $n\varphi_n = 2\pi$. Vegyük észre azt is, hogy a fenti két azonosságban az összegzés $\sin(\beta)$ -val, illetve $\cos(\beta)$ -val kezdődik, de a tételünkben megjelenő összegzésben ezek nem szerepelnek, így majd le kell vonnunk ezeket a tagokat a jobb oldalakból.

Az x koordináták összege:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_n) + \cos(2\varphi_n) + \cos(3\varphi_n) + \dots + \cos(n\varphi_n) = \\ \sum_{i=1}^n \sin(i\varphi_n) = \frac{\overbrace{\sin\left(\frac{(n+1)\varphi_n}{2}\right)}^{-\sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)} \cdot \overbrace{\cos\left(\frac{n\varphi_n}{2}\right)}^{-1}}{\sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)} - \cos(0) = \\ \frac{-\sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \cdot (-1)}{\sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)} - 1 = 0. \end{aligned} \quad (7.80)$$

Az első kapcsos zárójeles kifejezés átalakításakor kihasználtuk a szögek összegének szinuszára vonatkozó addíciós tételt:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{(n+1)\varphi_n}{2}\right) &= \sin\left(\frac{n\varphi_n}{2} + \frac{\varphi_n}{2}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\varphi_n}{2}\right) = \\ \underbrace{\sin(\pi)}_0 \cdot \cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) + \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} \cdot \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) &= -\sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \end{aligned} \quad (7.81)$$

Az y koordináták összege:

$$\begin{aligned} \sin(\varphi_n) + \sin(2\varphi_n) + \sin(3\varphi_n) + \dots + \sin(n\varphi_n) = \\ = \sum_{i=1}^n \sin(i\varphi_n) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\varphi_n}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\varphi_n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)} - \sin(0) = \\ = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\varphi_n}{2}\right) \cdot 0}{\sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)} - 0 = 0. \end{aligned} \quad (7.82)$$

□

Kis n -ek esetére álljon itt néhány számszerű illusztráció:

$$n = 3 \quad \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + (1, 0) = (0, 0), \quad (7.83)$$

$$n = 4 \quad (0, 1) + (-1, 0) + (0, -1) + (1, 0) = (0, 0), \quad (7.84)$$

$$\begin{aligned}n = 5 \quad & (\cos 72^\circ, \sin 72^\circ) + (\cos 144^\circ, \sin 144^\circ) + \\& (\cos 216^\circ, \sin 216^\circ) + (\cos 288^\circ, \sin 288^\circ) + \\& (\cos 360^\circ, \sin 360^\circ) = (0, 0) .\end{aligned}\tag{7.85}$$

7.4. A görög betűk

alfa	α	A	nű	ν	N
béta	β	B	kszi	ξ	Ξ
gamma	γ	Γ	omikron	o	O
delta	δ	Δ	pi	π	Π
epszilon	ε	E	ró	ϱ	P
dzéta	ζ	Z	szigma	σ	Σ
éta	η	H	tau	τ	T
théta	ϑ	Θ	üpszilon	v	Y
ióta	ι	I	fi	φ	Φ
kappa	κ	K	khi	χ	X
lambda	λ	Λ	pszi	ψ	Ψ
mű	μ	M	ómega	ω	Ω

7.1. táblázat. A görög kis- és nagybetűk

7.5. Jelölések és összefüggések a vektorszámításból

7.5.1. A Kronecker-delta szimbólum

A Kronecker-delta egy kétindexes matematikai szimbólum, melynek értéke az indexeitől függ:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j, \\ 1, & \text{ha } i = j. \end{cases} \quad (7.86)$$

Például ennek segítségével egy összegből kiválasztható egyetlen tag:

$$\sum_{i=1}^3 a_i \delta_{i2} = a_1 \delta_{12} + a_2 \delta_{22} + a_3 \delta_{32} = a_1 0 + a_2 1 + a_3 0 = a_2. \quad (7.87)$$

7.5.2. A vektori szorzat

Két vektor vektori szorzata:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \quad (7.88)$$

Ez felírható úgy is, mint egy mátrix és egy vektor szorzata:

$$\vec{a} \times \vec{b} = [A]\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \quad (7.89)$$

Könnyen belátható, hogy

$$\vec{b} \times \vec{a} = \vec{b}[A] = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} = -\vec{a} \times \vec{b}. \quad (7.90)$$

Az $[A]$ mátrix önmagával való szorzata:

$$\begin{aligned} [A]^2 &= [A][A] = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -a_2^2 - a_3^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_2a_1 & -a_1^2 - a_3^2 & a_2a_3 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & -a_1^2 - a_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.91)$$

A 6.10. fejezetben a Steiner-tag hasonló alakú lesz, egész pontosan egy ilyen típusú kifejezés mínusz egyszerese. Figyeljük meg, hogy érvényesek a következő egyenlőségek.

$$\vec{b}[A]^2\vec{b} = \vec{b}[A][A]\vec{b} = (\vec{b} \times \vec{a})(\vec{a} \times \vec{b}) = -|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = -(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha)^2, \quad (7.92)$$

ahol α a két vektor által bezárt szög.

7.5.3. A vegyes szorzat

Vektorok vegyes szorzatán az alábbi kifejezést értjük: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. A vegyes szorzatot ki lehet számítani a következő determináns kifejtésével:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (7.93)$$

A determinánsról tudjuk, hogy sorainak páratlan permutációja esetén előjelet vált, páros permutáció esetén pedig változatlan az értéke. Ez alapján a vegyes szorzatra érvényes az azonosságok következő csoportja:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) \quad (7.94)$$

7.5.4. Vektorok kétszeres vektoriális szorzata

A vektorok kétszeres vektoriális szorzatára érvényes az alábbi azonosság:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}). \quad (7.95)$$

Ez koordinátákkal felírva könnyen igazolható:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{a} \times \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(-b_1c_3 + b_3c_1))\vec{e}_1 \\ &\quad - (a_1(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_2c_3 - b_3c_2))\vec{e}_2 \\ &\quad + (a_1(-b_1c_3 + b_3c_1) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2))\vec{e}_3 \end{aligned} \quad (7.96)$$

Bontsuk fel a zárójeleket, és adjunk a kifejezéshez nulla összegű tagokat:

$$\begin{aligned} &= (a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 + a_3b_1c_3 - a_3b_3c_1 + \underbrace{a_1b_1c_1 - a_1b_1c_1}_0)\vec{e}_1 \\ &\quad - (a_1b_1c_2 - a_1b_2c_1 - a_3b_2c_3 + a_3b_3c_2 + \underbrace{a_2b_2c_2 - a_2b_2c_2}_0)\vec{e}_2 \\ &\quad + (-a_1b_1c_3 + a_1b_3c_1 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 + \underbrace{a_3b_3c_3 - a_3b_3c_3}_0)\vec{e}_3 \end{aligned} \quad (7.97)$$

Rendezzük át a tagokat:

$$\begin{aligned} &= (\underbrace{a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3}_{\vec{a}\vec{c}})b_1\vec{e}_1 + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2\vec{e}_2 \\ &\quad + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3\vec{e}_3 - (\underbrace{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}_{\vec{a}\vec{b}})c_1\vec{e}_1 \\ &\quad - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_2\vec{e}_2 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_3\vec{e}_3 \\ &= \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}). \end{aligned} \quad (7.98)$$

7.5.5. Négyzetes mátrix és vektor szorzata

Egy 3×3 -as négyzetes mátrix és egy háromdimenziós vektor szorzata az alábbi, egymással egyenértékű alakokban írható:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}\vec{a} &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^3 a_j m_{1j} \\ \sum_{j=1}^3 a_j m_{2j} \\ \sum_{j=1}^3 a_j m_{3j} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^3 a_j m_{1j} \vec{e}_1 + \sum_{j=1}^3 a_j m_{2j} \vec{e}_2 + \sum_{j=1}^3 a_j m_{3j} \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_j m_{ij} \vec{e}_i. \end{aligned} \quad (7.99)$$

7.6. Sajátérték, sajátvektor

Ebben a jegyzetben a tehetetlenségi tenzorral kapcsolatban találkozunk a sajátértékek, sajátvektorok fogalmával.

Tenzornak nevezzük a lineáris vektor-vektor függvényeket, azaz olyan ($\underline{\underline{M}}$) matematikai műveleteket, amelyek egy adott \vec{v} vektorhoz egy másik $\vec{u} = \underline{\underline{M}}\vec{v}$ vektort rendelnek hozzá. Csak háromdimenziós vektorokon ható és háromdimenziós vektorokat eredményező tenzorokkal és azok 3×3 -as négyzetes mátrixaival foglalkozunk. A vektor fogalmát itt nem részletezzük, gondolhatunk a háromdimenziós tér helyvektoraira is, vagy például arra, hogy a tehetetlenségi tenzor a szögsebesség vektorhoz hozzárendeli a merev test impulzusnyomaték vektorát a $\underline{\underline{J}}_A \vec{\omega} = \vec{N}_A$ összefüggés szerint. Legyen

$$[M_{ij}] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (7.100)$$

az M tenzor mátrixa egy bizonyos koordináta-rendszerben. Ugyanannak a tenzornak más-más koordináta-rendszerben más-más a mátrixa. Ha az \vec{u}, \vec{v} vektorok háromdimenziósak, akkor az adott koordináta-rendszerben az $\vec{u} = \underline{\underline{M}}\vec{v}$ egyenlőség egy mátrixegyenlettel írható le:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (7.101)$$

Az \vec{u} és \vec{v} vektorok általában nem azonos nagyságúak és nem párhuzamosak.

7.6.1. Definíció (Sajátvektor) Egy tenzor sajátvektora az a vektor (\vec{e}), amelyhez a tenzor önmagával párhuzamos vektort rendel hozzá.

$$\underline{\underline{M}}\vec{e} = \lambda \vec{e} \quad (7.102)$$

Nyilvánvaló, hogy a sajátvektor bármely számszorosa is sajátvektor, tehát egy adott sajátértékhez végtelen sok sajátvektor tartozik, amelyek mind párhuzamosak egymással. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért az \vec{e} jelölje az egység hosszúságú sajátvektort (ebből is van kettő, de most lényegtelen, hogy melyiket választjuk).

7.6.2. Definíció (Sajátérték) Egy tenzornak az \vec{e} vektorhoz tartozó sajátértéke az a (λ) szám, amellyel a tenzorművelet a sajátvektort megszorozza.

Egy tenzornak általában több sajátvektora és sajátértéke van, legfeljebb annyi, ahány dimenziós vektorokra hat: háromdimenziós vektorokra ható tenzorok esetén tehát legfeljebb három. A sajátvektorok és sajátértékek jele rendre $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ és $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Lehet kevesebb is a sajátértékek száma akkor, ha vannak közöttük egyenlők, ez esetben egy sajátértékhez több sajátvektor is tartozik, és a sajátvektorok által kifeszített ún. sajátaltér minden vektora sajátvektor. A szimmetrikus és a gömbi pörgettyűk esetén találkozunk ezzel az esettel.

7.6.1. Tétel (Tenzor sajátvektorainak merőlegessége) Egy tenzor sajátvektorai mindig merőlegesek egymásra.

A szimmetrikus tenzorok (amilyen a tehetetlenségi tenzor is) sajátértékei mindig valós számok. A sajátértékek alapján csoportosíthatjuk a tenzorokat.

7.6.3. Definíció (Tenzorok csoportosítása a sajátértékek szerint) Pozitív definit az a tenzor, amelynek minden sajátértéke pozitív.

Pozitív szemidefinit az a tenzor, amelynek minden sajátértéke pozitív vagy nulla.

Negatív definit az a tenzor, amelynek minden sajátértéke negatív.

Negatív szemidefinit az a tenzor, amelynek minden sajátértéke negatív vagy nulla.

Indefinit a tenzor, ha van pozitív és negatív sajátértéke is.

A térbeli merev testek tehetetlenségi tenzora pozitív definit, ez a definíciójából következik.

A sajátértékek és sajátvektorok segítségével megadható a tenzor diadikus

felbontása (háromdimenziós esetre szorítkozunk):

$$\underline{\underline{M}} = \lambda_1 \vec{e}_1 \circ \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 \circ \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 \circ \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \vec{e}_i \circ \vec{e}_i. \quad (7.103)$$

Használjuk ki, hogy a sajátvektorok merőlegesek egymásra, és adjuk meg a diadikus felbontást a sajátvektorok által meghatározott derékszögű koordináta-rendszerben:

$$[M_{ij}] = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (7.104)$$

7.6.2. Tétel (Tenzor mátrixa főtengetyrendszerben) Egy tenzor mátrixa a sajátvektorokkal párhuzamos tengelyekkel rendelkező koordináta-rendszerben diagonális.

Bizonyítás. A fenti gondolatmenet alapján belátható. \square

7.6.4. Definíció (Főtengetyrendszer) Egy tenzor főtengetyrendszere az a koordináta-rendszer, amelyben a tenzor mátrixa diagonális. A tenzor főtengetyrendszerben megadott mátrixának diagonális elemei a sajátértékek.

7.6.3. Tétel (Tenzor mátrixának determinánsa és a sajátértékek) Egy tenzor mátrixának a determinánsa egyenlő a sajátértékeinek szorzatával.

$$\det M = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (7.105)$$

Bizonyítás. A determináns definíciójából következik. \square

A sajátvektorok az

$$\underline{\underline{M}} \vec{e} = \lambda \vec{e} \quad (7.106)$$

$$(\underline{\underline{M}} - \lambda \underline{\underline{I}}) \vec{e} = 0 \quad (7.107)$$

$$(7.108)$$

ún. sajátérték egyenlet megoldásával kereshetők meg. Itt feltesszük, hogy $\vec{e} \neq 0$. Ebből következik, hogy az alábbi egyenletnek teljesülnie kell:

$$\det\{\underline{\underline{M}} - \lambda \underline{\underline{I}}\} = 0. \quad (7.109)$$

Ennek az egyenletnek a bal oldalán szereplő kifejezést a tenzor karakterisztikus polinomjának nevezzük. Ennek a polinomnak a foka megegyezik a tenzor dimenziószámával (ami egyben mátrixának mérete), ebből következően gyökeinek száma is ugyanennyi, többszörös gyökök esetén egy gyökhöz, azaz sajátértékhez több sajátvektor is tartozik.

Tárgymutató

- Érintő irányú egységvektor, 9
- állandó gyorsulású mozgás, 9, 17
 - pályája, 17
- érintő, 166
- érintő irányú egységvektor, 166
- érintőkör, 170
- út, 7
- a dinamika alapegyenlete, 41
- a hatás-ellenhatás elve, 43
- a szuperpozíció elve, 44
- a tömegpont mozgásegyenlete, 45
- a tehetetlenség törvénye, 38
- amplitúdó, 28
- arisztotelészi világkép, 57
- az akció-reakció elve, 43
- Binormális egységvektor, 10
- binormális egységvektor, 171
- centripetális gyorsulás, 23
- deriválás forgó rendszerben, 69
- dinamika alapegyenlete
 - gyorsuló
 - koordináta-rendszerben, 72
- dinamikus kiegyensúlyozás, 146
- egyenes vonalú egyenletes mozgás, 15
- egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás, 19
- elfordulásvektor, 169
- elmozdulás, 7
- energia, 48
- erő
 - belső, 81
 - centrifugális, 72
 - Coriolis, 72
 - Euler, 73
 - külső, 81
- erőtörvény
 - csúszási súrlódásé, 47
 - gravitációs, 47
 - lineáris rugalmas, 46
 - nehézségi, 46
 - tapadási súrlódásé, 47
- erőtörvények, 46
- Euler-szögek, 93
- fázis, 28
- Főnormális egységvektor, 10
- főnormális egységvektor, 168
- forgó egységvektor, 67
 - időderiváltja, 68
- foronómiai függvények, 12
- görög betűk, 175
- görbületi sugár, 10
- Galilei, 57, 61
 - féle relativitási elv, 61
 - féle sebességösszeadás, 60
 - transzformáció, 60

- gyorsulás, 8
 - centrifugális, 71
 - Coriolis, 71
 - szállító, 71
- gyorsuláspólus, 107
- harmonikus rezgőmozgás, 27
- helyvektor, 4, 89
 - relatív, 89
- helyzeti energia, 50
- homogén tömegeloszlás, 111
- impulzus, 40
 - pontrendszeré, 82
- impulzus vektorrendszer, 136
- impulzusnyomaték
 - pontrendszeré, 84
 - tömegelemé, 122
 - tétele, 85
- impulzustétel
 - pontrendszerre, 83
- inerciarendszerek
 - mozgása, 73
- körfrekvencia, 28
- körmozgás, 21
 - egyenletes, 24
 - egyenletesen gyorsuló, 26
 - egyenletesen változó, 26
- kísérő triéder, 10
- kétszeres vektoriális szorzat, 177
- kinetikai nyomaték, 137
- kinetikai vektor, 42
- kinetikai vektorrendszer, 136
- kontínuum, 87, 111
- konzervatív erőter, 50
- koordináta-rendszer, 155
 - henger, 162
 - síkbeli derékszögű, 155
 - síkbeli Descartes-féle, 155
 - síkbeli polár, 159
 - térbeli derékszögű, 157
 - térbeli Descartes-féle, 157
- Kronecker-delta, 175
- lendület, 40
- mátrix és vektor szorzata, 178
- mechanikai energia, 51
- mechanikai energia tétele, 51
- merev test, 87, 111
 - impulzusa, 120
 - impulzusnyomatéka, 122, 125
 - sebességállapota, 94
 - szögsebessége, 95
 - szabadsági foka, 92
 - tömegeloszlása, 111
- mozgási energia
 - merev testé, 139, 141
 - tömegponté, 49
- mozgásmennyiség, 40
- mozgástörvény, 5
- munka, 47
- munkatétel
 - differenciális alakja, 53
 - integrál alakja, 53
- normális irányú gyorsulás, 13
- normálsík, 10
- pálya, 5, 6
- pályagyorsulás, 12
- pályasebesség, 12
- párkölcsönhatás, 43
- perdület-tétel
 - pontrendszerre, 85
- pillanatnyi teljesítmény, 48
- pontrendszer
 - definíciója, 75
 - megadása, 76
- potenciál, 50
- potenciális energia, 50
- rektifikáló sík, 10

- súlypont, 80
- súlyponttétel, 83
- sajátérték, 179
- sajátvektor, 179
- sebesség, 8
 - szállító, 70
- simulókör, 10, 170
- simulósík, 10
- statikai nyomaték, 77, 112
- statikus kiegyensúlyozás, 146
- szöggyorsulás, 23
- szögsebesség, 22
- szállítósebesség, 70
- szabályos n -szög csúcpontjai, 171
- tömegelem, 111
- tömegközéppont, 79, 112
 - és szimmetria, 116
- homogén testé, 115
 - példák, 120
 - résztartományoké, 115
- tömegközéppont tétele, 83
- tömegpont, 3
- tömegsűrűség, 111
- térfogatelem, 111
- tangenciális gyorsulás, 24
- tehetetlenségi erő, 63
- tehetetlenségi tenzor, 124
 - szimmetriája, 127
- vegyes szorzat, 176
- vektori szorzat, 175
- vetületi mozgások, 13
- viszonyítási rendszer, 4
- Vonatkoztatási rendszer, 4

A definíciók listája

1.1.1. Definíció Tömegpont	3
1.2.1. Definíció vonatkoztatási rendszer	4
1.2.2. Definíció A tömegpont helye	4
1.2.3. Definíció Helyvektor	4
1.3.1. Definíció Mozgástörvény	5
1.3.2. Definíció Pálya	6
1.3.3. Definíció Út	7
1.3.4. Definíció Elmozdulás	7
1.4.1. Definíció A tömegpont sebessége	8
1.4.2. Definíció A tömegpont gyorsulása	8
1.5.1. Definíció Érintő irányú egységvektor	9
1.5.2. Definíció Főnormális egységvektor	10
1.5.3. Definíció Binormális egységvektor	10
1.5.4. Definíció Kísérő triéder	10
1.5.5. Definíció Nevezetes síkok	10
1.6.1. Definíció Pályasebesség	12
1.6.2. Definíció Pályagyorsulás	12
1.6.3. Definíció Foronómiai függvények	12
1.7.1. Definíció Normális gyorsulás	13
1.9.1. Definíció Egyenes vonalú egyenletes mozgás	15
1.10.1. Definíció Állandó gyorsulású mozgás	17
1.11.1. Definíció Körmozgás fogalma	21
1.11.2. Definíció Szögsebesség	22
1.11.3. Definíció Szöggyorsulás	23
1.11.4. Definíció Centripetális gyorsulás	23
1.11.5. Definíció Tangenciális gyorsulás	23
1.11.6. Definíció Egyenletes körmozgás	24
1.11.7. Definíció Egyenletesen változó körmozgás	26
1.12.1. Definíció Harmonikus rezgőmozgás	27
1.12.2. Definíció Amplitúdó	28
1.12.3. Definíció Körfrekvencia	28

1.12.4. Definíció Fázis	28
2.1.1. Definíció Tömegpont mozgásállapota	38
2.1.2. Definíció Tehetetlenség	39
2.1.3. Definíció Inerciarendszer	39
2.2.1. Definíció Mozgásmennyiség, impulzus, lendület	40
2.3.1. Definíció Kinetikai vektor	41
2.8.1. Definíció Munka	47
2.8.2. Definíció Pillanatnyi teljesítmény	48
2.9.1. Definíció Energia	48
2.10.1. Definíció Tömegpont mozgási energiája	49
2.11.1. Definíció Helyzeti energia	50
2.11.2. Definíció Konzervatív erőter	50
2.11.3. Definíció Mechanikai energia	51
3.3.1. Definíció Tehetetlenségi erő	63
3.7.1. Definíció Szállítósebesség	70
3.7.2. Definíció Coriolis-gyorsulás	71
3.7.3. Definíció Centrifugális gyorsulás	71
3.7.4. Definíció Szállítógyorsulás	71
3.8.1. Definíció Coriolis-erő	72
3.8.2. Definíció Centrifugális erő	72
3.8.3. Definíció Euler-erő	72
4.1.1. Definíció Pontrendszer	75
4.2.1. Definíció Tömegpont statikai nyomatéka	76
4.2.2. Definíció Pontrendszer statikai nyomatéka	78
4.2.3. Definíció Pontrendszer tömegközéppontja	79
4.4.1. Definíció Külső erő	81
4.4.2. Definíció Belső erő	81
4.7.1. Definíció Pontrendszer impulzusnyomatéka	84
5.1.1. Definíció Merev test	87
5.1.2. Definíció Kontínuum	87
5.2.1. Definíció Relatív helyvektor	89
5.2.2. Definíció Relatív sebességvektor	90
5.2.3. Definíció Relatív gyorsulásvektor	90
5.5.1. Definíció Merev test sebességállapotának redukált vektorket- tőse	97
5.6.1. Definíció Centrális egyenes	101
5.7.1. Definíció Sebességpólus	104
5.8.1. Definíció Gyorsuláspólus	107

6.1.1.	Definíció Tömegsűrűség	111
6.1.2.	Definíció Homogén tömegeloszlás	111
6.2.1.	Definíció Elemi statikai nyomaték	112
6.2.2.	Definíció Kontinuum statikai nyomatéka	113
6.2.3.	Definíció Kontinuum tömegközéppontja	114
6.4.1.	Definíció Impulzus vektorrendszer	121
6.7.1.	Definíció Tehetetlenségi tenzor főtengetyrendszere	126
6.7.2.	Definíció Főtengety	126
6.7.3.	Definíció Főirány	127
6.7.4.	Definíció Főtehetetlenségi nyomaték	127
6.7.5.	Definíció Deviációs nyomaték	127
6.8.1.	Definíció Pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték	128
6.8.2.	Definíció Koordináta tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték	128
6.8.3.	Definíció Koordináta síkra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték	128
6.8.4.	Definíció Koordináta síkpárra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték	129
6.11.1.	Definíció Kinetikai vektorrendszer	136
6.11.2.	Definíció Impulzus vektorrendszer	136
6.11.3.	Definíció Kinetikai nyomaték	137
7.2.1.	Definíció Görbeív	164
7.2.2.	Definíció Térgörbe	165
7.2.3.	Definíció Ívhossz	165
7.6.1.	Definíció Sajátvektor	178
7.6.2.	Definíció Sajátérték	179
7.6.3.	Definíció Tenzorok csoportosítása a sajátértékek szerint	179
7.6.4.	Definíció Főtengetyrendszer	180

A tételek listája

1.3.1. Tétel A mozgástörvény általános alakja	5
1.7.1. Tétel A sebességvektor érintő irányú	12
1.7.2. Tétel A gyorsulásvektor a simulásikban van	13
1.10.1. Tétel Állandó gyorsulású mozgás pályája	17
1.11.1. Tétel Körmozgás szöggyorsulása	23
1.12.1. Tétel Harmonikus rezgés és körmozgás kapcsolata	28
2.10.1. Tétel Tömegpont mozgási energiája	49
2.11.1. Tétel Mechanikai energia tétele	51
2.13.1. Tétel A munkatétel differenciális alakja	53
2.13.2. Tétel A munkatétel integrál alakja	53
3.2.1. Tétel Galilei-féle relativitási elv	61
3.9.1. Tétel Inerciarendszerek relatív mozgása	73
4.2.1. Tétel Tömegpontok statikai nyomatékainak összefüggése	78
4.2.2. Tétel Pontrendszer statikai nyomatékai	79
4.2.3. Tétel Pontrendszer tömegközéppontjának helyvektora	79
4.5.1. Tétel Pontrendszer impulzusa	82
4.6.1. Tétel Impulzustétel pontrendszerre	83
4.6.2. Tétel A tömegközéppont tétele, súlyponttétel	84
4.7.1. Tétel Pontrendszer impulzusnyomatéka különböző pontokra	85
4.7.2. Tétel Az impulzusnyomaték tétele, perdülettétel	85
5.2.1. Tétel A relatív sebességvektor előállítás	90
5.2.2. Tétel A relatív gyorsulásvektor előállítás	90
5.3.1. Tétel A merev test szabadási foka	91
5.5.1. Tétel Merev test relatív sebességvektorának iránya	94
5.5.2. Tétel A merev test szögsebessége szabad vektor	95
5.5.3. Tétel Merev test tetszőleges pontjának sebessége	96
5.5.4. Tétel Merev test pillanatnyi mozgásának összetevői	97
5.5.5. Tétel Nulla szögsebességű merev test sebességállapota	98

5.6.1.	Tétel A szögsebességgel párhuzamos egyenesen levő két pont sebessége	98
5.6.2.	Tétel A szögsebességgel párhuzamos egyenesen levő pontok sebessége	99
5.6.3.	Tétel A szögsebesség irányába mozgó pont létezése és helyének megadása	99
5.6.4.	Tétel A szögsebességgel párhuzamosan mozgó pontok száma	101
5.6.5.	Tétel A centrális egyenes iránya	101
5.7.1.	Tétel Pillanatnyi forgástengely pontjainak sebessége	103
5.7.2.	Tétel A pillanatnyi csavartengely pontjainak sebessége	104
5.7.3.	Tétel Pillanatnyi csavarmozgást végző test pontjainak sebessége	105
5.8.1.	Tétel Merev test pontjainak relatív gyorsulása és relatív helyvektora	105
5.8.2.	Tétel Merev test tetszőleges pontjának gyorsulása	106
6.2.1.	Tétel Kontinuum tömegközéppontjának helyvektora	114
6.2.2.	Tétel Tömegközéppont számítása résztartományokból	115
6.2.3.	Tétel Homogén tömegeloszlású kontinuum tömegközéppontja	115
6.3.1.	Tétel A tömegközéppont és a tömegeloszlás szimmetriája	116
6.3.2.	Tétel Homogén szimmetrikus test tömegközéppontja	120
6.4.1.	Tétel A merev test impulzusa	121
6.7.1.	Tétel A főtengelyrendszer kezdőpontja	127
6.7.2.	Tétel A tehetetlenségi tenzor mátrixa szimmetrikus	127
6.7.3.	Tétel A tehetetlenségi főtengelyek és a szimmetria	127
6.9.1.	Tétel A tehetetlenségi nyomatékok összeadhatósága	130
6.10.1.	Tétel Steiner tétele a tehetetlenségi tenzorra	131
6.10.2.	Tétel Steiner tétele a tehetetlenségi nyomatékokra	133
7.1.1.	Tétel Forgó bázisvektorok időderiváltjai	160
7.2.1.	Tétel A mozgástörvény ívhosszparaméter szerinti első deriváltja	166
7.3.1.	Tétel Állandó hosszúságú vektor időderiváltja	171
7.3.2.	Tétel Szabályos n -szög csúcspontjai	171
7.6.1.	Tétel Tenzor sajátvektorainak merőlegessége	179
7.6.2.	Tétel Tenzor mátrixa főtengelyrendszerben	180
7.6.3.	Tétel Tenzor mátrixának determinánsa és a sajátértékek	180

Irodalomjegyzék

- [1] Béda Gyula, Bezák Antal: *Kinematika és dinamika*
Tankönyvkiadó, Budapest, 1991, ISBN 963 18 3112 4
- [2] Ferdinand P. Beer, E. Russel Johnston Jr., David F. Mazurek, Phillip J. Cornwell, Elliot R. Eisenberg :
Vector mechanics for engineers (statics and dynamics)
McGraw-Hill, Boston ... Toronto, 2010, ISBN 978 007 3529400
- [3] Dr. Budó Ágoston: *Mechanika*
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1979, ISBN 963 18 5970 3
- [4] Égert János, Nagy Zoltán: *Mechanika - Mozgástan*
Széchenyi István Egyetem, Győr, 2006
[hivatkozás a jegyzetre a http://jegyzet.sze.hu/ oldalon](http://jegyzet.sze.hu/)
Ezen belül az Alkalmazott Mechanika Tanszék aloldalát kell megnyitni.
- [5] Király Béla: *Dinamika*
Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, 2006, ISBN 963 661 721 X